



MAED 607 Semester-III

मापन एवं मूल्यांकन Measurement and Evaluation



शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा
उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय , हल्द्वानी

अध्ययन बोर्ड			
प्रोफेसर जे0के0 जोशी निदेशक शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय हल्द्वानी, उत्तराखण्ड	प्रोफेसर एन0 एन0 पाण्डेय(सदस्य) शिक्षा संकाय एम० जे० पी० रुहेलखंड, विश्वविद्यालय, बरेली, उत्तरप्रदेश	प्रोफेसर बी0 आर0 कुकरेती (सदस्य) शिक्षा संकाय एम० जे० पी० रुहेलखंड, विश्वविद्यालय, बरेली, उत्तरप्रदेश	प्रोफेसर रम्भा जोशी शिक्षा संकाय कुमाँऊ विश्वविद्यालय एस0एस0 जे0 परिसर, अल्मोड़ा
डॉ0 दिनेश कुमार सहायक प्रोफेसर उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय हल्द्वानी, उत्तराखण्ड	डॉ0 रजनी रंजन सिंह सहायक प्रोफेसर उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय हल्द्वानी, उत्तराखण्ड	डॉ0 प्रवीण कुमार तिवारी सहायक प्राध्यापक उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय हल्द्वानी, उत्तराखण्ड	सुश्री ममता कुमारी सहायक प्रोफेसर उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय हल्द्वानी, उत्तराखण्ड
डॉ0 भावना पलडिया सहायक प्राध्यापक उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय हल्द्वानी, उत्तराखण्ड	श्रीमती मनीषा पंत परमर्शदाता उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी, उत्तराखण्ड	श्री सिद्धार्थ पोखरियाल संविदा शिक्षक उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय हल्द्वानी, उत्तराखण्ड	
पाठ्यक्रम संयोजक एवं संपादक		उप संपादक	
डॉ0 दिनेश कुमार सहायक प्रोफेसर शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय हल्द्वानी, उत्तराखण्ड		डॉ डिगर सिंह फर्सवान सहायक प्रोफेसर शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय हल्द्वानी, उत्तराखण्ड	
इकाई लेखन	इकाई संख्या	इकाई लेखन	इकाई संख्या
डॉ० रजनी रंजन सिंह, असोसिएट प्रोफेसर, सतत शिक्षा विभाग, वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा, राजस्थान	1,2. 3 & 4	डॉ० धर्म सिंह, सहायक प्रोफेसर, शिक्षा विभाग, राजकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, नैनीटांडा, पटौटिया, पौड़ी गढ़वाल, उत्तराखण्ड	5,6,7

ISBN-13 -978-93-84632-50-2

समस्त लेखों/पाठों से सम्बंधित किसी भी विवाद के लिए सम्बंधित लेखक जिम्मेदार होगा। किसी भी विवाद का जूरिसडिक्शन हल्द्वानी (नैनीताल) होगा।

कापीराइट: उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय प्रकाशन वर्ष: 2014 पुनः प्रकाशन- 2022

संस्करण: सीमित वितरण हेतु पूर्व प्रकाशन प्रति

प्रकाशक: एम0पी0डी0डी0, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय
उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी-263139, (नैनीताल)



उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी
मापन एवं मूल्यांकन
Measurement and Evaluation
MAED- 607 Semester III

इकाई सं०	इकाई का नाम	पृष्ठ सं०
1	केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापक Measures of Central Tendency	1-40
2	विचरणशीलता के मापक Measures of Variability	41-70
3	सामान्य प्रायिकता वक्र Normal Probability Curve-NPC	71-108
4	सहसंबंध विधियाँ Correlation Methods	109-144
5	मनोवैज्ञानिक परीक्षण : प्रक्रिया, उपयोग तथा परीक्षण प्राप्तांकों का निर्वचन Psychological Testing : Procedures, Uses and Interpretations of Test Scores	145-169
6	मापन एवं मूल्यांकन Measurement & Evaluation	170-184
7	उपलब्धि परीक्षण का निर्माण Construction of Achievement Test	185-205

इकाई 1: केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापक (Measures of Central Tendency)

- 1.1 प्रस्तावना
- 1.2 उद्देश्य
- 1.3 सांख्यिकी का अर्थ
- 1.4 वर्णात्मक सांख्यिकी
- 1.5 केन्द्रीय प्रवृत्ति का अर्थ एवं परिभाषा
- 1.6 केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के उद्देश्य व कार्य
- 1.7 आदर्श माध्य के लक्षण
- 1.8 सांख्यिकीय माध्य के विविध प्रकार
- 1.9 समान्तर माध्य
- 1.10 समान्तर माध्य के प्रकार
- 1.11 सरल समान्तर माध्य ज्ञात करने की विधि
- 1.12 मध्यका
- 1.13 मध्यका की गणना
- 1.14 मध्यका के सिद्धान्त पर आधारित अन्य माप
- 1.15 बहुलक
- 1.16 बहुलक की गणना
- 1.17 समान्तर माध्य , मध्यका तथा बहुलक के बीच संबंध
- 1.18 सारांश
- 1.19 शब्दावली
- 1.20 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर
- 1.21 संदर्भ ग्रन्थ सूची/ पाठ्य सामग्री
- 1.22 निबंधात्मक प्रश्न

1.1 प्रस्तावना

हमारे जीवन में संख्याओं की भूमिका तीव्र गति से बढ़ती जा रही है। ज्ञान, विज्ञान, समाज और राजनीति का कोई भी ऐसा क्षेत्र नहीं है जो संख्यात्मक सूचना के प्रवेश से अछूता रह गया हो।

ऑकड़ों का संकलन, सूचनाओं का प्रस्तुतीकरण, सम्भावनाओं का पता लगाना तथा इनके आधार पर निष्कर्ष निकालना आधुनिक समाज में एक आम बात हो गई है। शैक्षिक विश्लेषण, शैक्षिक सम्प्राप्ति (उपलब्धि परीक्षण), बुद्धि परीक्षण, व्यक्तित्व मूल्यांकन आदि कुछ ऐसे उदाहरण हैं जिन पर 'सांख्यिकीय' विधियों के प्रयोग के अभाव में विचार करना भी सम्भव नहीं है। इस प्रकार शोध एवं विकास की शायद ही कोई ऐसी शाखा हो, जिसे सांख्यिकीय विधियों के प्रयोग के बिना संचालित किया जा सके। कार्य के आधार पर सांख्यिकी को मुख्यतः दो भागों में बांटा जाता है: वर्णनात्मक सांख्यिकी (Descriptive Statistics) तथा अनुमानिकी सांख्यिकी (Inferential Statistics)। प्रस्तुत इकाई में आप सांख्यिकी का अर्थ तथा वर्णनात्मक सांख्यिकी के रूप में केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापकों (Measures of Central Tendency) का अध्ययन करेंगे।

1.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप-

1. सांख्यिकी का अर्थ बता पाएँगे।
2. वर्णनात्मक सांख्यिकी का अर्थ बता पाएँगे।
3. वर्णनात्मक सांख्यिकी के महत्त्व का वर्णन कर सकेंगे।
4. वर्णनात्मक सांख्यिकी के संप्रत्यय की व्याख्या कर सकेंगे।
5. केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न मापकों का परिकलन कर सकेंगे।
6. केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न मापकों की तुलना कर सकेंगे।

1.3 सांख्यिकी का अर्थ (Meaning of Statistics)

अंग्रेजी भाषा का शब्द 'स्टैटिस्टिक्स' (Statistics) जर्मन भाषा के शब्द 'स्टैटिस्टिक' (Statistick), लेटिन भाषा के शब्द 'Status' या इटैलियन शब्द 'स्टैटिस्टा' (Statista) से बना है। वैसे 'स्टैटिस्टिक्स' (Statistics) शब्द का प्रयोग सन् 1749 में जर्मनी के प्रसिद्ध गणितज्ञ 'गॉट फ्रायड आकेनवाल' द्वारा किया गया था जिन्हें सांख्यिकी का जन्मदाता भी कहा जाता है।

डा० ए०एल० बाउले (Dr. A.L. Bowley) के अनुसार :- समक किसी अनुसंधान से संबंधित विभाग में तथ्यों का संख्यात्मक विवरण हैं जिन्हें एक दूसरे से संबंधित रूप से प्रस्तुत किया जाता है (Statistics are numerical statement of facts in any department of enquiry placed in relation to each other)।

यूल व कैण्डाल के अनुसार:- "समंकों से अभिप्राय उन संख्यात्मक तथ्यों से जो पर्याप्त सीमा तक अनेक कारणों से प्रभावित होते हैं।"

बॉडिंगटन के अनुसार:- "सांख्यिकी अनुमानों और संभावनाओं का विज्ञान है (Statistics is the Science of estimates and probabilities)

सांख्यिकी के इन परिभाषाओं से निम्नलिखित विशेषताएँ प्रकट होती हैं:-

- i. "सांख्यिकी गणना का विज्ञान है (Statistics is the science of counting)"
- ii. "सांख्यिकी को सही अर्थ में माध्यों का विज्ञान कहा जा सकता है (Statistics may rightly be called the science of Averages)"
- iii. "सांख्यिकी सामाजिक व्यवस्था को सम्पूर्ण मानकर उनके सभी प्रकटीकरणों में माप करने का एक विज्ञान है (Statistics is the science of measurement of social organism regarded as a whole in all its manifestations) "

1.4 वर्णात्मक सांख्यिकी (Descriptive Statistics)

इनसे किसी क्षेत्र के भूतकाल तथा वर्तमान काल में संकलित तथ्यों का अध्ययन किया जाता है और इनका उद्देश्य विवरणात्मक सूचना प्रदान करना होता है। अतः ये समंक ऐतिहासिक महत्त्व रखते हैं। केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप, विवरणात्मक या वर्णात्मक सांख्यिकी के उदाहरण हैं।

1.5 केन्द्रीय प्रवृत्ति का अर्थ एवं परिभाषा (Meaning and Definition of Central Tendency):

एक समंक श्रेणी की केन्द्रीय प्रवृत्ति का आशय उस समंक श्रेणी के अधिकांश मूल्यों की किसी एक मूल्य के आस-पास केन्द्रित होने की प्रवृत्ति से है, जिसे मापा जा सके और इस प्रवृत्ति के माप को ही माध्य कहते हैं। माध्य को केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप इसलिए कहा जाता है क्योंकि व्यक्तिगत चर मूल्यों का जमाव अधिकतर उसी के आस-पास होता है। इस प्रकार माध्य सम्पूर्ण समंक श्रेणी का एक प्रतिनिधि मूल्य होता है और इसलिए इसका स्थान सामान्यतः श्रेणी के मध्य में ही होता है। दूसरे शब्दों में, सांख्यिकीय माध्य को केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप इसलिए कहा जाता है क्योंकि यह समग्र के

उस मूल्य को दर्शाता है, जिसके आस-पास समग्र की शेष इकाईयों के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति पायी जाती है।

यूल व केण्डाल (Yule and Kendal) के शब्दों में:- "किसी आवृत्ति वितरण की अवस्थिति या स्थिति के माप माध्य कहलाते हैं।"

(Measures of location or position of a frequency distribution are called averages)

क्रॉक्सटन एवं काउडेन (Croxtan and Cowden) के अनुसार:- "माध्य समकों के विस्तार के अन्तर्गत स्थित एक ऐसा मूल्य है जिसका प्रयोग श्रेणी के सभी मूल्यों का प्रतिनिधित्व करने के लिये किया जाता है। समक श्रेणी के विस्तार के मध्य में स्थित होने के कारण ही माध्य को केन्द्रीय मूल्य का माप भी कहा जाता है।"

(An average is single value within the range at the data which is used to represent all the values in the series. Since an average is somewhere within the range of the data, it is some times called a measure of central value)

डा० बाउले के अनुसार:- "सांख्यिकी को वास्तव में माध्यों का विज्ञान कहा जा सकता है।"
(Statistics may rightly be called the science of average)

1.6 केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के उद्देश्य व कार्य(Objectives and functions of Measures of Central Tendency):

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के उद्देश्य एवं कार्य निम्न प्रकार हैं-

1. **सामग्री को संक्षिप्त रूप में प्रस्तुत करना:-** माध्य द्वारा हम संग्रहीत सामग्री को संक्षेप में प्रस्तुत करते हैं, जिसे एक समान व्यक्ति शीघ्रता व सरलता से समझ कर स्मरण रख सकता है।
2. **तुलनात्मक अध्ययन:-** माध्यों का प्रयोग दो या दो से अधिक समूहों के संबंध में निश्चित सूचना देने के लिए किया जाता है। इस सूचना के आधार पर हम उन समूहों का पारस्परिक तुलनात्मक अध्ययन सरलता से कर सकते हैं। उदाहरणार्थ: हम दो कक्षाओं के छात्रों की अंकों की तुलनात्मक अध्ययन के आधार पर उनकी उपलब्धि की तुलना का सकते हैं।

3. **समूह का प्रतिनिधित्व:-** माध्य द्वारा सम्पूर्ण समूह का चित्र प्रस्तुत किया जा सकता है। एक संख्या (माध्य) द्वारा पूर्ण समूह की संरचना के बारे में पर्याप्त जानकारी प्राप्त हो सकती है। प्रायः व्यक्तिगत इकाइयाँ अस्थिर व परिवर्तनशील होती हैं जबकि औसत इकाइयाँ अपेक्षाकृत स्थिर होती हैं।
4. **अंक गणितीय क्रियाएँ:-** दो विभिन्न श्रेणियों के संबंध को अंकगणित के रूप में प्रकट करने हेतु माध्यों की सहायता अनिवार्य हो जाती है और इन्हीं के आधार पर अन्य समस्त क्रियाएँ सम्पन्न की जाती हैं।
5. **भावी योजनाओं का आधार:-** हमें माध्यों के रूप में समूह का एक ऐसा मूल्य प्राप्त होता है जो हमारी भावी योजनाओं के लिए आधार का कार्य करता है।
6. **पारस्परिक संबंध:-** कभी-कभी दो समक समूहों के पारस्परिक संबंध की आवश्यकता होती है, जैसे- दो समूहों में परिवर्तन एक ही दिशा में है या विपरीत दिशा में। यह जानने के लिए माध्य ही सबसे सरल मार्ग है।

1.7 आदर्श माध्य के लक्षण (Essential Characteristics of an Ideal Average)

किसी भी आदर्श माध्य में निम्नलिखित गुण होनी चाहिए:-

1. **प्रतिनिधि:-** माध्य द्वारा समग्र का प्रतिनिधित्व किया जाना चाहिए, जिससे समग्र की अधिकाधिक विशेषताएँ माध्य में पायी जा सकें। माध्य ऐसा हो कि समग्र के प्रत्येक मद से उसकी अधिक निकटता प्राप्त हो सके।
2. **स्पष्ट एवं स्थिर:-** माध्य सदैव स्पष्ट एवं स्थिर होना चाहिए ताकि अनुसंधान कार्य ठीक ढंग से सम्पन्न किया जा सके। स्थिरता से आशय है कि समग्र की इकाइयों में कुछ और इकाइयाँ जोड़ देने या घटा देने से माध्य कम से कम प्रभावित हो।
3. **निश्चित निर्धारण:-** आदर्श माध्य वही होता है जो निश्चित रूप में निर्धारित किया जा सकता हो। अनिश्चित संख्या निष्कर्ष निकालने में भ्रम उत्पन्न कर देती है। यदि माध्य एक संख्या न होकर एक वर्ग आये तो इसे अच्छा माध्य नहीं कहेंगे।
4. **सरलता व शीघ्रता:-** आदर्श माध्य में सरलता व शीघ्रता का गुण भी होना चाहिए जिससे किसी भी व्यक्ति द्वारा इसकी गणना सरलता व शीघ्रता से की जा सके तथा वह समझने में किसी प्रकार की कठिनाई अनुभव न करे।

5. **परिवर्तन का न्यूनतम प्रभाव:-** आदर्श माध्य की यह विशेषता होनी चाहिए कि न्यादर्श में होने वाले परिवर्तनों का माध्य पर कम से कम प्रभाव पड़े। यदि न्यादर्श में परिवर्तन से माध्य भी परिवर्तित हो जाता है तो उसे माध्य नहीं कहा जा सकता।
6. **निरपेक्ष संख्या:-** माध्य सदैव निरपेक्ष संख्या के रूप में ही व्यक्त किया जाना चाहिए। उसे प्रतिशत में या अन्य किसी सापेक्ष रीति से व्यक्त किया हुआ नहीं होना चाहिए।
7. **बीजगणित एवं अंकगणित विधियों का प्रभाव:-** एक आदर्श माध्य में यह गुण भी आवश्यक है कि उसे सदैव अंकगणित एवं बीजगणित विवेचन में प्रयोग होने की व्यवस्था होनी चाहिए।
8. **माध्य का आकार:-** आदर्श माध्य वह होता है जो श्रृंखला या श्रेणी के समस्त मूल्यों के आधार पर ज्ञात किया गया हो।
9. **श्रेणी के मूल्यों पर आधारित:-** माध्य संख्या यदि श्रेणी में वास्तव में स्थित हो तो उचित है अन्यथा माध्य अनुमानित ही सिद्ध होगा।

1.8 सांख्यिकीय माध्य के विविध प्रकार (Different kinds of Statistical Averages):

सांख्यिकीय में मुख्यतः निम्न माध्यों का प्रयोग होता है:-

- I. स्थिति सम्बन्धी माध्य (Averages of position)
 - a. बहुलक (Mode)
 - b. मध्यका (Median)
- II. गणित सम्बन्धी माध्य (Mathematical Average)
 - a. समान्तर माध्य (Arithmetic Average or mean)
 - b. गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)
 - c. हरात्मक माध्य (Harmonic Mean)
 - d. द्विघात या वर्गीकरण माध्य (Quadratic Mean)
- III. व्यापारिक माध्य (Business Average)
 - a. चल माध्य (Moving Average)
 - b. प्रगामी माध्य (Progressive Average)
 - c. संग्रहीत माध्य (Composite Average)

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के रूप में आप यहाँ समान्तर माध्य (Arithmetic Mean), मध्यका (Median) व बहुलक (Mode) का ही अध्ययन करेंगे।

1.9 समान्तर माध्य (Arithmetic Mean)

समान्तर माध्य गणितीय माध्यों में सबसे उत्तम माना जाता है और यह केन्द्रीय प्रवृत्ति का सम्भवतः सबसे अधिक लोकप्रिय माप है। क्रॉक्सटन तथा काउडेन के अनुसार- " किसी समंक श्रेणी का समान्तर माध्य उस श्रेणी के मूल्यों को जोड़कर उसकी संख्या का भाग देने से प्राप्त होता है।" होरेस सेक्रिस्ट के मतानुसार- "समान्तर माध्य वह मूल्य है जो कि एक श्रेणी के योग में उनकी संख्या का भाग देने से प्राप्त होती है।"

1.10 समान्तर माध्य के प्रकार (Types of Arithmetic Mean):

समान्तर माध्य दो प्रकार के होते हैं।

1. सरल समान्तर माध्य (Simple Arithmetic Mean)
2. भारित समान्तर माध्य (Weighted Arithmetic Mean)

1. **सरल समान्तर माध्य :-** जब समंक श्रेणी के समस्त मदों को समान महत्त्व दिया जाता है तो मदों के मूल्यों के योग में मदों की संख्या का भाग दिया जाता है। इसे ही सरल समान्तर माध्य कहते हैं।
2. **भारित समान्तर माध्य :-** समान्तर माध्य में यह दोष है कि समस्त मदों को समान महत्त्व दिया जाता है, किन्तु कभी-कभी समंक श्रेणी के विभिन्न मदों में काफी भिन्नता होती है। उनमें आवश्यकता अनुसार महत्त्व देना आवश्यक हो जाता है। इसके लिए प्रत्येक मद को उसकी व्यक्तिगत महत्ता के आधार पर भार (Weight) प्रदान किया जाता है। इसके बाद प्रत्येक मद के मूल्य को उसके द्वारा दिये गये भार से गुणा कर देते हैं। इस प्रकार गुणनफल के योग में भारों के योग का भाग देने पर प्राप्त होने वाली संख्या भारित समान्तर माध्य कहलाती है।

1.11 सरल समान्तर माध्य ज्ञात करने की विधि (Method of Computing Arithmetic Mean)

समान्तर माध्य की गणना करने के लिए दो रीतियों का प्रयोग किया जाता है:-

- i. प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)
- ii. लघु रीति (Short-cut Method)

अवर्गीकृत तथ्यों या व्यक्तिगत श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना:-

1. **प्रत्यक्ष रीति (Direct Method):-** प्रत्यक्ष रीति में (i) समस्त मदों के मूल्यों का योग किया जाता है। (ii) प्राप्त मूल्यों के योग में मदों की संख्या का भाग देकर समान्तर माध्य ज्ञात किया जाता है। यह विधि उस समय उपयुक्त होती है जब चर मूल्यों की संख्या कम हो तथा वे दशमलव में हों।

सूत्रानुसार –
$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{N}$$

—
$$\frac{\text{पदों का योग (Total Value of)} \quad \text{अथवा}}{\text{पदों की संख्या}} \quad \bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

यहाँ \bar{X} = समान्तर माध्य (Mean)

N = मदों की कुल संख्या (No. of Items)

Σ = योग (Sum or Total)

X = मूल्य या आकार (Value or Size)

उदाहरण:- निम्नलिखित सारणी में कक्षा IX के छात्रों के गणित का अंक प्रस्तुत किया गया है। समान्तर माध्य का परिकलन प्रत्यक्ष रीति द्वारा करें।

S.N.	Marks
1.	57
2.	45
3.	49
4.	36
5.	48
6.	64
7.	58
8.	75
9.	68
योग (Total)	500

$$\text{सूत्रानुसार } \bar{X} = \frac{\sum x}{N}$$

$$\sum X = 500$$

$$N = 9$$

$$\bar{X} = \frac{500}{9} = 55.55$$

$$\text{माध्य (Mean)} = 55.55$$

2. लघु रीति (Short Cut Method):- इस रीति का प्रयोग उस समय किया जाता है, जबकि समंक श्रेणी में मदों की संख्या बहुत अधिक हो। इस रीति का प्रयोग करते समय निम्नलिखित क्रियायें की जाती हैं:-

- कल्पित माध्य (A):-** श्रेणी में किसी भी संख्या को कल्पित माध्य मान लेते हैं। यह संख्या चाहे उस श्रेणी में हो अथवा नहीं, परन्तु श्रेणी के मध्य की किसी संख्या को कल्पित माध्य मान लेने से गणना क्रिया सरल हो जाती है।
- विचलन (dx) की गणना:-** उपयुक्त कल्पित माध्य से समूह के विभिन्न वास्तविक मूल्यों का विचलन धन (+) तथा ऋण (-) के चिन्हों को ध्यान में रखते हुए ज्ञात करते हैं।
(dx = X-A)

- iii. **विचलनों का योग ($\sum dx$):-** व्यक्तिगत श्रेणी में सभी विचलनों को जोड़ लेते हैं। ऐसा करते समय धनात्मक और ऋणात्मक चिन्हों को ध्यान में रखा जाता है।
- iv. **मदों की संख्या (N) से भाग देना:-** उपयुक्त प्रकार से प्राप्त योग में मदों की संख्या का भाग दे दिया जाता है।
- v. **माध्य (\bar{X}) ज्ञात करना:-** विचलन के योग में मदों की संख्या का भाग देने पर जो भागफल प्राप्त हो, उसे कल्पित माध्य में जोड़कर अथवा घटाकर माध्य ज्ञात करते हैं। भागफल यदि धनात्मक हो तो उसे कल्पित माध्य में जोड़ देते हैं और यदि यह ऋणात्मक हो तो उसे कल्पित माध्य में से घटा देते हैं। इस प्रकार प्राप्त होने वाली संख्या समान्तर माध्य कहलायेगी। यह रीति इस तथ्य पर आधारित है कि वास्तविक समान्तर माध्य से विभिन्न मदों के विचलन का योग शून्य होता है।

$$\text{सूत्रानुसार:- } \bar{X} = A + \frac{\sum dx}{N}$$

यहाँ \bar{X} = समान्तर माध्य (Arithmetic mean)

A = कल्पित माध्य (Assumed mean) $\sum dx =$
कल्पित माध्य से लिये गये मूल्यों के विचलनों का योग

(Sum of deviations from Assumed mean)

N = मदों की संख्या (Total No. Items)

उदाहरण:- निम्नलिखित सारणी में कक्षा IX के 10 छात्रों को विज्ञान विषय के अधिकतम प्राप्तांक 20 में से निम्न अंक प्राप्त हुए हैं, इन छात्रों का विज्ञान विषय में समान्तर माध्य की गणना लघु रीति से करें।

अंक – 15, 13, 09, 18, 17, 08, 12, 14, 11, 10

समान्तर माध्य की गणना (Calculation):

S. N.	Marks	Deviation
1.	15	- 2
2.	13	- 4
3.	09	- 8
4.	18	+ 1

5.	17	0
6.	08	- 9
7.	12	- 5
8.	14	- 3
9.	11	- 6
10.	10	- 7
N= 10		योग =- 44+1
		$\sum dx = - 43$

$$\bar{X} = A + \frac{\sum dx}{N}$$

$$= 17 + \frac{-43}{10}$$

$$= 17 + (-4.3)$$

$$= 12.7$$

खण्डित श्रेणी (Discrete Series):- खण्डित श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना दो प्रकार से की जा सकती है।

- i. **प्रत्यक्ष विधि (Direct Method):-** खण्डित श्रेणी में कुल पदों के मूल्यों का योग ज्ञात करने हेतु प्रत्येक पद मूल्य (x) को उसकी आवृत्ति (f) से गुणा किया जाता है, इन गुणनफलों का योग ही कुल पद मूल्यों का योग होता है ($\sum fx$), इन योग में पदों की संख्या (N) का भाग देने से समान्तर माध्य ज्ञात हो जाता है, यथा

1. प्रत्येक मूल्य से उसकी आवृत्ति को गुणा करते हैं (fx)
2. गुणनफल का योग ज्ञात करते हैं ($\sum xf$)
3. कुल आवृत्ति का योग ज्ञात करते हैं ($\sum f$ or N)
4. गुणनफल के योग में कुल आवृत्तियों के योग से भाग देकर समान्तर माध्य प्रस्तुत

सूत्र द्वारा ज्ञात करते हैं: $\bar{X} = \frac{\sum fx}{N}$

यहाँ \bar{X} = समान्तर माध्य

$\sum fx$ = मूल्यों से संबंधित आवृत्तियों के गुणनफलों का योग।

N = आवृत्तियों का योग

ii. लघु रीति (Short-Cut Method):- गणना विधि-

1. किसी मूल्य को कल्पित माध्य (A) मान लेते हैं।
2. कल्पित माध्य से वास्तविक मूल्यों के विचलन ज्ञात करते हैं। ($dx=X-A$)
3. इन विचलनों (dx) को संबंधित आवृत्ति (f) से गुणा करते हैं। (fdx)
4. गुणनफल से योग ज्ञात करते हैं ($\sum f dx$)
5. गुणनफल के योग में कुल आवृत्ति के योग का भाग देने पर जो संख्या प्राप्त हो उसे कल्पित माध्य में जोड़कर अथवा घटाकर समान्तर माध्य ज्ञात करते हैं।
6. इसको ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं:-

$$\bar{X} = A + \frac{\sum f dx}{N}$$

यहाँ \bar{X} = समान्तर माध्य

A = कल्पित माध्य

$\sum f x$ = विचलनों व आवृत्तियों के गुणनफल का योग।

N = आवृत्तियों का योग।

उदाहरण:- निम्नलिखित समंकों से प्रत्यक्ष रीति व लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य का परिकलन कीजिए। 20, 25, 75, 50, 10, 15, 60, 65

हल:

क्रम सं०	प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)	लघु रीति (Short Cut)		विचलन A= 50 से dx
1.	20	1	20	-30
2.	25	2	25	-25
3.	75	3	75	+25
4.	50	4	50	+0
5.	10	5	10	-40
6.	15	6	15	-35
7.	60	7	60	+10
8.	65	8	65	+15
N= 8	$\sum x = 320$			$\sum dx = -80$

प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)	लघु रीति (Short Cut)
$X = \frac{\sum X}{N} = \frac{320}{8}$ $= 40$ <p>माध्य = 40</p>	$\bar{X} = A + \frac{\sum dx}{N}$ $= 50 + \frac{-80}{8}$ $= 50 + (-10) = 40$ <p>माध्य = 40</p>

सतत श्रेणी (Continuous Series):- अखण्डित या सतत श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना के लिए सर्वप्रथम वर्गान्तरों के मध्य मूल्य ज्ञात करके उसे खण्डित श्रेणी में परिवर्तित कर लेते हैं। मध्य मूल्य ज्ञात करने के लिए वर्गान्तरों की अपर और अधर सीमाओं को जोड़कर दो से भाग दिया जाता है। यह इस मान्यता पर आधारित है कि मध्यमूल्य उस वर्ग में सम्मिलित सभी मदों का प्रतिनिधि मूल्य होता है। इसके पश्चात् प्रत्यक्ष या लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य ज्ञात कर लेते हैं। इसकी विधि खण्डित श्रेणी के समान ही है।

उदाहरण:- निम्न आवृत्ति वितरण से समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए:-

Marks (out of 50)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
No. of Student	10	12	20	18	10

हल (Solution):-

समान्तर माध्य का प्रत्यक्ष व लघु रीति विधि से परिकलन (Calculation of Arithmetic Mean by direct & Short -Cut Method)

Marks	M.V.=X	f	fx	dx A= 25	f dx
0-10	5	10	50	-20	-200
10-20	15	12	180	-10	-120
20-30	25	20	500	0	0
30-40	35	18	630	+10	+180
40-50	45	10	450	+20	+200

Total		N=70	$\sum fx = 1810$		$\sum fdx = -320 + 380 = +60$
--------------	--	------	------------------	--	-------------------------------

Direct Method	Short- Cut Method
$\bar{X} = \frac{\sum fx}{N}$ $= \frac{1810}{70}$ $= 25.86 \text{ Marks}$	$\bar{X} = A + \frac{\sum fdx}{N}$ $= 25 + \frac{60}{70}$ $= 25 + 0.86 = 25.86 \text{ Marks}$

समान्तर माध्य (Mean) = 25.86 Marks

समावेशी श्रेणी Inclusive Series)

उदाहरण:- निम्नलिखित समकों से समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए-

Marks	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50
No. of Student	5	7	10	6	2

हल (Solution):- समान्तर माध्य का परिकलन (Calculation of Arithmetic Mean)

Marks	F	Mid Value=x	f x	dx	f dx
1-10	5	5.5	27.5	-20	-100
11-20	7	15.5	108.5	-10	-70
21-30	10	25.5	255.0	0	0
31-40	6	35.5	213.0	+10	+60
41-50	2	45.5	91.0	+20	+40
Total	N= 30	$\sum fx = 695.0$			$\sum fdx = -70$

Direct Method	Short- Cut Method
$\bar{X} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{695}{30}$ $= 23.17 \text{ Marks}$ <p>समान्तर माध्य (Mean) = 23.7 marks</p>	$\bar{X} = A + \frac{\sum fdx}{N}$ $= 25.5 + \frac{-70}{30}$ $= 25.5 - 2.33 = 23.17 \text{ mean}$

पद विचलन रीति (Step deviation method):- इस रीति का प्रयोग उस समय किया जाता है जबकि विचलनों को किसी समान संख्या में विभाजित किया जा सके तथा वर्गान्तरों की संख्या अधिक हो। इस विधि में लघु रीति के आधार पर विचलन ज्ञात करते हैं और विचलनों में समापवर्तक (Common factor) 'i' से भाग दिया जाता है। प्रायः इस विधि का प्रयोग समान वर्गान्तर वाली श्रेणी में किया जाता है। इस रीति से प्रश्न हल करने के लिए निम्नलिखित विधि अपनायी जाती है:-

1. सभी वर्गान्तरों के मध्य बिन्दु (x) ज्ञात करते हैं।
2. श्रेणी के लगभग बीच के सभी वर्गान्तर के मध्य बिन्दु को कल्पित माध्य मान कर प्रत्येक वर्गान्तर के मध्य बिन्दु से विचलन (dx) ज्ञात करते हैं। ऐसा करते समय धनात्मक और ऋणात्मक चिन्हों का ध्यान रखना चाहिए।
3. इन विचलनों को ऐसी संख्या से विभाजित कर देते हैं जिसका सभी में भाग चला जाए। व्यवहार में कल्पित मूल्य के सामने के पद विचलन के खाने में 0 लिखकर ऊपर की ओर -1, -2, -3 आदि व नीचे की ओर +1, +2, +3 आदि लिख देते हैं। ये ही पद विचलन होते हैं (dx')
4. इसके पश्चात् पद विचलनों को उनकी आवृत्ति से गुणा करके गुणनफल का योग ज्ञात कर लेते हैं। ($\sum fdx'$)
5. इस प्रकार ज्ञात गुणनफल के योग में आवृत्तियों की कुल संख्या का भाग दे देते हैं।
6. पद विचलन रीति अपनाने पर निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं:-

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fdx'}{N} Xi$$

जहाँ \bar{X} = समान्तर माध्य

A = कल्पित माध्य

i = वर्गान्तर

dx' = पद विचलन (Step deviation)

$\sum fdx'$ = पद विचलनों और आवृत्तियों के गुणनफल का योग।

उदाहरण:- निम्न सारणी से समान्तर माध्य पद विचलन रीति से ज्ञात कीजिए।

Marks (out of 50)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
No. of Student	2	3	8	4	3

हल (Solution):-

Marks	M.V.= x	No. of students (f)	dx' A= 25	fdx'
0-10	5	2	-2	-4
10- 20	15	3	-1	-3
20-30	25	8	0	0
30-40	35	4	+1	+4
40-50	45	3	+2	+6
Total		N= 20		$\sum fdx'$

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fdx'}{N} xi$$

$$= 25 + \frac{3}{20} \times 10$$

$$= 25 + \frac{30}{20}$$

$$= 25 + 1.5$$

$$\text{समान्तर माध्य} = 26.5$$

अशुद्ध मूल्य को शुद्ध करना:- जब गणना करने में त्रुटि हो जाती है तो समान्तर माध्य भी गलत हो जाता है। उसका सही मूल्य ज्ञात करने हेतु सूत्र का प्रयोग करते हैं। सूत्र द्वारा कुल मूल्य ज्ञात कर उसमें आवश्यक शुद्धि की जाती है। तत्पश्चात् सही समान्तर माध्य ज्ञात किया जाता है।

उदाहरण:- 100 छात्रों के औसत प्राप्तांक 40 थे। बाद में पता चला कि एक विद्यार्थी के 74 के स्थान पर गलती से 14 अंक पढ़े गये। सही समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

Solution:-

यहाँ - $\bar{X} = 40$ और $N=100$ और 74 के स्थान पर 14 पढ़े गये कुल
अंक (Total Marks) $(\sum x) = \bar{X} \times N = 40 \times 100 = 4000$ marks

सही अंक (Corrected) $(\sum x) = 4000 - 14 + 74 = 4060$ marks

Corrected $\bar{X} = 4060 \div 100 = 40.60$ marks

सामूहिक समान्तर माध्य (Combined Arithmetic Mean):- यदि अनेक श्रेणियों में पृथक-पृथक समान्तर माध्य ज्ञात हैं और उसे मिलाकर सामूहिक माध्य ज्ञात करने की आवश्यकता हो तो उन अलग-अलग माध्यों की सहायता से सामूहिक माध्य ज्ञात कर सकते हैं। इसके लिए निम्न सूत्र का प्रयोग करेंगे:-

$$\text{सामूहिक माध्य (Combined Mean) } (\bar{X}_{123\dots n}) \\ = \frac{\bar{X}_1 N_1 + \bar{X}_2 N_2 + \bar{X}_3 N_3 + \dots + \bar{X}_n N_n}{N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_n}$$

यहाँ - $\bar{X}_{123} =$ सामूहिक माध्य (Combined Mean)

$N_1, N_2 =$ पदों की संख्या प्रथम, द्वितीय समूह इत्यादि में (No. of Item for first group, second group and so on)

$\bar{X}_1, \bar{X}_2 =$ प्रथम, द्वितीय समूह इत्यादि का औसत (Average of first group, second group and so on)

उदाहरण 1:- एक आवृत्ति वितरण के तीन भाग हैं जिनकी आवृत्तियाँ 100, 150 तथा 200 है और उनके समान्तर माध्य क्रमशः 25, 15, 10 है। कुल वितरण का सामूहिक माध्य ज्ञात कीजिए।

हल (Solution):-

$$\bar{X}_{123} = \frac{\bar{X}_1 N_1 + \bar{X}_2 N_2 + \bar{X}_3 N_3}{N_1 + N_2 + N_3}$$

$$= \frac{25 \times 100 + 15 \times 150 + 10 \times 200}{100 + 150 + 200}$$

$$= \frac{2500 + 2250 + 2000}{450}$$

$$= \frac{6750}{450} = 15$$

सामूहिक माध्य = 15

समान्तर माध्य की बीजगणितीय विशेषताएँ (Algebraic Properties of Arithmetic Mean):- समान्तर माध्य की बीजगणितीय विशेषताएँ निम्नलिखित हैं :-

1. विभिन्न मदों के मूल्यों का समान्तर माध्य से लिये गये विचलनों का योग हमेशा शून्य होता है। अर्थात् $\sum d = \sum (X - \bar{X}) = 0$

2. समान्तर माध्य से लिये गये विचलनों के वर्गों का योग, अन्य किसी मूल्य से लिये गये विचलनों के वर्गों के योग से कम होता है अर्थात् $\sum X^2 < \sum dx^2$, अतः प्रमाप विचलन की न्यूनतम वर्ग विधि व सह संबंध में समान्तर माध्य की इस विशेषता का प्रयोग किया जाता है।
3. यदि \bar{X} , N व $\sum X$ में से कोई दो माप ज्ञात हों तो तीसरा माप ज्ञात किया जा सकता है, अर्थात् $\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$ or $\sum X = (\bar{X}N)$ or $N = \frac{\sum X}{\bar{X}}$
4. समान्तर माध्य के अन्तर्गत प्रमाप विभ्रम अन्य माध्य की अपेक्षा कम होता है।
5. यदि एक समूह के दो या अधिक भागों के समान्तर माध्य व उसकी संख्या दी गई हो तो सामूहिक समान्तर माध्य ज्ञात किया जा सकता है।
6. यदि किसी श्रेणी की मर्दों की समान मूल्य से गुणा करें, भाग दें, जोड़ दें अथवा घटा दें तो समान्तर माध्य पर वैसा ही प्रभाव पड़ता है। जैसे किसी समंक का समान्तर माध्य 20 है यदि इस समंक के पदों के प्रत्येक मूल्य में 2 जोड़ दिया जाय तो नवीन समान्तर माध्य $20+2$ अर्थात् 22 हो जायेंगे।

समान्तर माध्य के गुण (Merits of Mean)

1. **सरल गणना:-** समान्तर माध्य की परिकलन सरल है और इसे एक सामान्य व्यक्ति भी सरलता से समझ सकता है।
2. **सभी मूल्यों पर आधारित:-** समान्तर माध्य में श्रेणी के समस्त मूल्यों का उपयोग किया जाता है।
3. **निश्चित संख्या:-** समान्तर माध्य एक निश्चित संख्या होती जिस पर समय, स्थान व व्यक्ति का कोई प्रभाव नहीं पड़ता। श्रेणी को चाहे जिस क्रम में लिखा जाए, समान्तर माध्य में कोई अन्तर नहीं होगा।
4. **स्थिरता:-** समान्तर माध्य में प्रतिदर्श (Sample) के उच्चावचन का अन्य माध्य की अपेक्षा प्रभाव पड़ता है अर्थात् एक समग्र में से यदि दैव प्रतिदर्श के आधार पर कई प्रतिदर्श लिये जायें तो उनके समान्तर माध्य समान होंगे।
5. **बीजगणितीय प्रयोग सम्भव:-** समान्तर माध्य की परिगणना में किसी भी सांख्यिकी विश्लेषण में इसका प्रयोग किया जाता है।
6. **शुद्धता की जाँच :-** समान्तर माध्य में चालीयर जाँच के आधार पर शुद्धता की जाँच सम्भव है।

7. **क्रमबद्धता और समूहीकरण की आवश्यकता नहीं:-** इसमें मध्यका के तरह श्रेणी को क्रमबद्ध व व्यवस्थित करने अथवा बहुलक की भौति विश्लेषण तालिका और समूहीकरण करने की आवश्यकता नहीं।

समान्तर माध्य के दोष (Demerits of Mean):-

1. **श्रेणी के चरम मूल्यों का प्रभाव:-** समान्तर माध्य की गणना में श्रेणी के सभी मूल्यों को समान महत्त्व दिया जाता है, अतः इसकी गणना में बहुत बड़े व बहुत छोटे मूल्यों का बहुत प्रभाव पड़ता है।
2. **श्रेणी की आकृति से समान्तर माध्य ज्ञात करना संभव नहीं:-** जिस प्रकार श्रेणी की आकृति को देखकर बहुलक अथवा मध्यका का अनुमान लगाया जा सकता है, समान्तर माध्य का अनुमान लगाना संभव नहीं।
3. **श्रेणी की सभी मदों का वास्तविक मूल्य ज्ञान होना:-** समान्तर माध्य की गणना के लिए श्रेणी के सभी मूल्यों का ज्ञात होना आवश्यक है। यदि श्रेणी के एक मद का भी मूल्य ज्ञात नहीं है तो समान्तर माध्य ज्ञात नहीं किया जा सकता है।
4. **काल्पनिक संख्या:-** समान्तर माध्य एक ऐसा मूल्य हो सकता है जो श्रेणी की सम्पूर्ण संख्या में मौजूद नहीं हो। जैसे 4, 9 व 20 का समान्तर माध्य 11 है जो श्रेणी के बाहर का मूल्य होने के कारण उसके किसी मूल्य का प्रतिनिधित्व नहीं करता।
5. **हास्यास्पद परिणाम:-** समान्तर माध्य में कभी-कभी हास्यास्पद परिणाम भी निकलते हैं। जैसे किसी गाँव के 5 परिवारों में बच्चों की संख्या 8 हो तो माध्य 1.6 प्राप्त होगा जो हास्यास्पद है, क्योंकि 1.6 बच्चे का कोई अर्थ नहीं होता है।

समान्तर माध्य के उपयोग:- समान्तर माध्य का उपयोग उस दशा में उपयोगी सिद्ध होता है जब श्रेणी के सभी मूल्यों को समान महत्त्व देना हो व पूर्ण गणितीय शुद्धता की आवश्यकता हो। व्यवहार में इसका प्रयोग सबसे अधिक होता है, क्योंकि इसकी गणना सरलता से की जा सकती है। औसत प्राप्तांक, औसत बुद्धि, औसत आय, औसत मूल्य, औसत उत्पादन, आदि में समान्तर माध्य का ही प्रयोग किया जाता है। इसका प्रयोग गुणात्मक अध्ययन के लिए नहीं किया जा सकता है।

अभ्यास प्रश्न

1.की गणना में श्रेणी के सभी मूल्यों को समान महत्त्व दिया जाता है।
2. विभिन्न मदों के मूल्यों का समान्तर माध्य से लिये गये विचलनों का योग हमेशा होता है।

3. किसी समंक का समान्तर माध्य 42 है यदि इस समंक के पदों के प्रत्येक मूल्य में 4 जोड़ दिया जाय तो नवीन समान्तर माध्य हो जायेंगे।
4. केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप..... सांख्यिकी के उदाहरण हैं।
5. सांख्यिकी को वास्तव में..... का विज्ञान कहा जाता है।

1.12 मध्यका (Median)

मध्यका एक स्थिति संबंधी माध्य है। यह किसी समंक माला का वह मूल्य है जो कि समंक माला को दो समान भागों में विभाजित करता है। दूसरे शब्दों में मध्यका अवरोही या आरोही क्रम में लिखे हुए विभिन्न मर्दों के मध्य का मूल्य होता है। जिसके ऊपर व नीचे समान संख्या में मर्द मूल्य स्थित होते हैं। डॉ ए0एल0 बाउले के अनुसार "यदि एक समूह के पदों को उनके मूल्यों के आधार पर क्रमबद्ध किया जाय तो लगभग बीच का मूल्य ही मध्यका होता है।" कॉनर के अनुसार- "मध्यका समंक श्रेणी का वह चर मूल्य है जो समूह को दो बराबर भागों में विभाजित करता है, जिसमें एक भाग में मूल्य मध्यका से अधिक और दूसरे भाग में सभी मूल्य उससे कम होते हैं।"

1.13 मध्यका की गणना (Computation of Median)

मध्यका की गणना के लिए सर्वप्रथम श्रेणी को व्यवस्थित करना चाहिए। मर्दों को किसी मापनीय गुण के आधार पर आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करते समय मूल्यों से संबंधित सूचना समय, दिन, वर्ष, नाम, स्थान, रोल नम्बर आदि को मूल्यों के आधार पर बदल लिया जाना चाहिए। आरोही क्रम में सबसे पहले छोटे मर्द को और उसके बाद उससे बड़े को और इसी क्रम में अंत में सबसे बड़े मर्द को लिखते हैं और अवरोही क्रम से सबसे बड़े मर्द को, फिर उससे छोटे को और अंत में सबसे छोटे मर्द को लिखा जाता है।

मध्यका की गणना विधि: व्यक्तिगत श्रेणी (Individual Series):- इसमें मध्यका की गणना की विधि इस प्रकार है:-

- a. श्रेणी के पदों को आरोही अथवा अवरोही क्रम में रखते हैं।
- b. इसके पश्चात् निम्न सूत्र का प्रयोग कर मध्यका ज्ञात करते हैं:-

$$M = \text{Size of } \frac{(N+1)}{2} \text{ th item}$$

विषम संख्या होने पर (Odd Numbers):-

उदाहरण:- निम्न समंकों की सहायता से मध्यका की गणना कीजिए:-

9 10 6 8 11

हल: श्रेणी के पदों को आरोही क्रम में रखने पर

6 8 9 10 11

$$\text{मध्यका} = \frac{(5+1)}{2} \text{ वां पद का आकार}$$

अर्थात् तीसरा पद ही मध्यका का मान होगा = 9

सम संख्या होने पर (Even Numbers):- उपयुक्त उदाहरण में संख्या विषम थी। अतः मध्य बिन्दु सरलता से ज्ञात कर लिया गया परन्तु यदि संख्या सम हो तो उसमें एक संख्या जोड़ने पर ऐसी संख्या बन जायेगी जिसमें दो का भाग देने पर हमें सम्पूर्ण संख्या प्राप्त होगी। ऐसी स्थिति में सूत्र का प्रयोग करके वास्तविक स्थिति ज्ञात कर लेनी चाहिए। तत्पश्चात् जिन दो संख्याओं के बीच मध्यका हो, उन संख्याओं के मूल्यों को जोड़कर दो से भाग देना चाहिए। इससे प्राप्त संख्या मध्यका का वास्तविक मूल्य होगा।

उदाहरण:- निम्न समंकों की सहायता से मध्यका की गणना कीजिए:-

10 11 6 8 9

हल: श्रेणी के पदों को आरोही क्रम में रखने पर

6 8 9 10 11 15

$$\text{मध्यका} = \frac{(9+10)}{2} = 9.5$$

खण्डित श्रेणी (Discrete Series):- खण्डित श्रेणी में मध्यका ज्ञात करने के लिए निम्न कार्य करना होता है:-

1. पद मूल्यों (Size) को अवरोही अथवा आरोही क्रम में व्यवस्थित करना।
2. श्रेणी में दी गई आवृत्तियों की संचयी आवृत्ति ज्ञात करना।
3. मध्यका अंक ज्ञात करने के लिए $\frac{N+1}{2}$ सूत्र का प्रयोग करना, यहाँ 'N' का अर्थ आवृत्तियों की कुल संख्या से है।
4. मध्यका पद को संचयी आवृत्ति से देखना है। मध्यका पद जिस संचयी आवृत्ति में आता है, उसके सामने वाला पद-मूल्य ही मध्यका कहलाता है।

उदाहरण:- निम्न समकों की सहायता से मध्यका की गणना कीजिए:-

छात्रों की संख्या	- 6	8	9	10	11	15	16	20	25
अंक	28	20	27	21	22	26	23	24	25

हल : मध्यका ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम श्रेणी को व्यवस्थित करेंगे। फिर सूत्र का प्रयोग किया जायेगा।

Marks	No. of Student	Cumulative Frequency
20	8	8
21	10	18
22	11	29
23	16	45
24	20	65
25	25	90
26	15	105
27	9	114
28	6	120

$$\text{मध्यका (Median)} = \frac{N+1}{2} \text{ वां पद का आकार}$$

$$= \frac{120+1}{2}$$

$$= 60.5$$

अतः 60.5 वॉ मद 65 संचयी आवृत्ति के सामने अर्थात् 24 रू0 है मध्यका मजदूरी = 24 रू0 है।

सतत् श्रेणी (Continuous Series) :- सतत् श्रेणी में मध्यका ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित क्रिया विधि अपनायी जाती है:-

1. सबसे पहले यह देखना चाहिए की श्रेणी अपवर्जी है अथवा समावेशी। यदि श्रेणी समावेशी दी गई है तो उसे अपवर्जी में परिवर्तन करना चाहिए।
2. इसके बाद साधारण आवृत्तियों की सहायता से संचयी आवृत्तियों (C.F.) ज्ञात करना चाहिए।
3. इसके पश्चात् $N/2$ की सहायता से मध्यका मद ज्ञात की जाती है।
4. मध्यका मद जिस संचयी आवृत्ति में होती है उसी से संबंधित वर्गान्तर मध्यका वर्ग (Median group) कहलाता है।
5. मध्यका वर्ग में मध्यका निर्धारण का आन्तर्गणन निम्न सूत्र की सहायता से किया जाता है:-

$$M = L_1 + \frac{i}{f}(m - c) \text{ or } M = L_2 - \frac{L_2 - L_1}{f}(m - c)$$

M = मध्यका (Median)

L_1 = मध्यका वर्ग की निम्न सीमा L_2 = मध्यका वर्ग की उच्च

सीमा f = मध्यका वर्ग की आवृत्ति m = मध्यका मद ($\frac{N}{2}$)

C = मध्यका वर्ग से पहले वाले वर्ग की संचयी आवृत्ति

i = मध्यका वर्ग का वर्ग विस्तार

1. यदि श्रेणी अवरोही क्रम में दी गई है तो निम्न सूत्र का प्रयोग करेंगे:-

$$M = L_2 - \frac{i}{f}(m - c)$$

अपवर्जी श्रेणी (Exclusive Series):

उदाहरण:- निम्न सारणी से मध्यका ज्ञात कीजिए।

अंक	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
-----	-----	------	-------	-------	-------

छात्रों की संख्या - 5	8	10	9	8
-----------------------	---	----	---	---

Marks	No. of Student F	Cumulative Frequency c f
0-5	5	5
5-10	8	13
10-15	10	23
15-20	9	32
20-25	8	40

$M = \frac{N}{2}$ th item (वीं मद) or $40/2 = 20^{th}$ items (वीं मद). यह मद 23 संचयी आवृत्ति में सम्मिलित है जिसका मूल्य $= (10-15)$ रू० है। सूत्र द्वारा मध्यका $M = L_1 + \frac{i}{f}(m - c) = 10 + \frac{5}{10}(20 - 13)$ or $10 + 3.5 = 13.5$

मध्यका (Median) = 13.50

समावेशी श्रेणी (Inclusive Series) : जब मूल्य अवरोही क्रम (Descending order) में दिये गए हों-

उदाहरण:- निम्न श्रेणी से मध्यका की गणना कीजिए।

अंक	25-30	20-25	15-20	10-15	5-10	0-5
छात्रों की संख्या	8	12	20	10	8	2

हल :

Marks	No. of Student	Cumulative Frequency
-------	----------------	----------------------

	f	cf
25-30	8	8
20-25	12	20
15-20	20	40
10-15	10	50
5-10	8	58
0-5	2	60

$M = \frac{N}{2}$ वीं मद या $\frac{60}{2} = 30$ वीं मद, जो 40 संचयी आवृत्ति में है, जिसका वर्ग 15-20 है। सूत्र

$$\text{द्वारा : } M = L_2 - \frac{i}{f}(m - c) = 20 - \frac{5}{20}(30 - 20)$$

$$= 20 - \frac{5}{20} \times 10 = 20 - 2.5 = 17.5 \text{ Marks}$$

अतः मध्यका अंक = 17.5

वर्ग के मध्य मूल्य (Mid Value) दिये होने पर:

उदाहरण:- निम्न समकों की सहायता से मध्यका का निर्धारण कीजिए।

मध्य बिन्दु (Central Size) 5 15 25 35 45 55 65 75

आवृत्ति (Frequency) 15 20 25 24 12 31 71 52

हल : - ऐसे प्रश्नों को सबसे पहले उपखण्डित श्रेणी में परिवर्तित करेंगे। उपयुक्त उदाहरण में वर्गान्तर 10 है। इसका आधा भाग अर्थात् 5 प्रत्येक मध्य बिन्दु से घटाकर व आधा भाग मध्य बिन्दु में जोड़कर वर्ग की निम्न सीमा व उच्च सीमायें मालूम करके प्रश्न को हल किया जायेगा।

Size	Calculation of Central Value	Median F	Size C F
0-10	5	15	15
10-20	15	20	35
20-30	25	25	60
30-40	35	24	84
40-50	45	12	96
50-60	55	31	127
60-70	65	71	198
70-80	75	52	250

$M = \frac{N}{2}$ वीं मद या $\frac{250}{2} = 125$ वीं मद जिसका मूल्य 50-60 मध्यका वर्ग में है।

सूत्र द्वारा $= M = L_1 + \frac{i}{f}(m - c)$

$$= 50 + \frac{10}{31}(125 - 96)$$

$$= 50 + \frac{290}{31}$$

$$= 50 + 9.35 = 59.35$$

अतः मध्यका = 59.35

मध्यका की विशेषताएँ (Characteristics of Median):

1. मध्यका एक स्थिति सम्बन्धी माप है।
2. मध्यका के मूल्य पर अति सीमान्त इकाइयों का प्रभाव बहुत कम होता है।

3. मध्यका की गणना उस दशा में भी की जा सकती है जब श्रेणी की मर्दों को संख्यात्मक रूप नहीं दिया जा सकता हो।
4. अन्य माध्यों की भौति मध्यका का गणितीय विवेचन सम्भव नहीं है।
5. यदि मर्दों की संख्या व मध्यका वर्ग मात्र के विषय में सूचना दी हुई है, तो भी मध्यका की गणना संभव है अर्थात् अपूर्ण सूचना से भी मध्यका मूल्य का निर्धारण संभव है।

मध्यका के गुण (Merits of Median)

1. बुद्धिमत्ता, सुन्दरता एवं स्वस्थता आदि गुणात्मक विशेषताओं के अध्ययन के लिए अन्य माध्यों की अपेक्षा मध्यका श्रेष्ठ समझा जाता है।
2. मध्यका पर अति सीमांत और साधारण मर्दों का प्रभाव नहीं पड़ता है।
3. मध्यका को ज्ञात करना सरल और सुविधाजनक रहता है। इसकी गणना करना एक साधारण व्यक्ति भी सरलता से समझ सकता है।
4. कभी-कभी तो मध्यका की गणना निरीक्षण मात्र से ही की जा सकती है।
5. मध्यका को बिन्दुरेखीय पद्धति से भी ज्ञात किया जा सकता है।
6. मध्यका की गणना करने के लिए सम्पूर्ण समंकों की आवश्यकता नहीं होती है। केवल मर्दों की एवं मध्यका वर्ग का ज्ञान पर्याप्त है।
7. यदि आवृत्तियों की प्रवृत्ति श्रेणी के मध्य समान रूप से वितरित होने की हो तो मध्यका को एक विश्वसनीय माध्य माना जाता है।
8. मध्यका सदैव निश्चित एवं स्पष्ट होता है व सदैव ज्ञात किया जा सकता है।
9. मध्यका अधिकतर श्रेणी में दिये गये किसी मूल्य के समान ही होता है।

मध्यका के दोष (Demerits of Median):

1. मध्यका की गणना करने के लिए कई बार श्रेणी को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करना होता है, जो कठिन है।
2. यदि मध्यका तथा मर्दों की संख्या दी गई हो तो भी इनके गुणा करने पर मूल्यों का कुल योग प्राप्त नहीं किया जा सकता।
3. मर्दों का अनियमित वितरण होने पर मध्यका प्रतिनिधि अंक प्रस्तुत नहीं करता व भ्रमपूर्ण निष्कर्ष निकालते हैं।
4. जब मर्दों की संख्या सम है तो मध्यका का सही मूल्य ज्ञात करना संभव नहीं हो पाता है। ऐसी स्थिति में मध्यका का मान अनुमानित ही होता है।

5. सतत् श्रेणी में मध्यका की गणना के लिए आन्तर्गणन का सूत्र प्रयुक्त किया जाता है, जिसकी मान्यता है कि वर्ग की समस्त आवृत्तियाँ पूरे वर्ग में समान रूप से फैली हुई है, जबकि वास्तव में ऐसा न होने पर निष्कर्ष अशुद्ध और भ्रामक होते हैं।
6. जब बड़े एवं छोटे मदों को समान भार देना हो तो यह माध्य अनुपयुक्त है, क्योंकि यह छोटे और बड़े मदों को छोड़ देता है।
7. मध्यका का प्रयोग गणितीय क्रियाओं में नहीं किया जा सकता है।
8. मध्यका ज्ञात करते समय, यदि इकाईयों की संख्या में वृद्धि की जाय तो इसका मूल्य बदल जायेगा।

मध्यका की उपयोगिता : जिन तथ्यों की व्यक्तिगत रूप से पृथक-पृथक तुलना नहीं की जा सकती अथवा जिन्हें समूहों में रखा जाना आवश्यक है, उनकी तुलना के लिए मध्यका का प्रयोग बहुत उपयोगी है। इसके द्वारा ऐसी समस्याओं का अध्ययन भी संभव होता है, जिन्हें परिणाम में व्यक्त नहीं किया जा सकता है। उदाहरणार्थ- सुन्दरता, बुद्धिमानी, स्वास्थ्य आदि को परिमाण में व्यक्त नहीं कर सकते। ऐसी स्थिति में जहाँ अति सीमांत मदों को महत्त्व नहीं दिया जाता हो, यहाँ माध्य उपयुक्त रहता है।

1.14 मध्यका के सिद्धान्त पर आधारित अन्य माप

जिस प्रकार मध्यका द्वारा एक श्रेणी की अनुविन्यासित मदों को दो बराबर भागों में बाँटा जाता है, उसी प्रकार श्रेणी को चार, पाँच, आठ, दस व सौ बराबर भागों में बाँटा जा सकता है। चार भागों में बाँटने वाला मूल्य चतुर्थक (Quartiles), पाँच भागों में बाँटने वाला मूल्य पंचमक (Quintiles), आठ भागों वाले मूल्य अष्टमक (Octiles), दस वाले दशमक (Deciles) व सौ बराबर भागों में बाँटने वाले मूल्य शतमक (Percentiles) कहलाते हैं। इन विभिन्न मापों का प्रयोग सांख्यिकीय विश्लेषण में किया जाता है। ये माप अपनी स्थिति के आधार पर निर्धारित की जाती जिनका विवेचन निम्न खण्डों में किया गया है:-

1. **चतुर्थक (Quartiles):-** यह एक अत्यधिक महत्त्व पूर्ण माप है जो सबसे अधिक प्रयोग में आता है। जब किसी अनुविन्यासित श्रेणी को चार समान भागों में बाँटा जाना हो तो उसमें तीन चतुर्थक होंगे। प्रथम चतुर्थक को निचला चतुर्थक (Lower Quartile), दूसरे चतुर्थक को मध्यका तथा तृतीय चतुर्थक को उच्च चतुर्थक (Upper Quartile) कहते हैं।
2. **पंचमक (Quintiles):-** श्रेणी को पाँच बराबर भागों में बाँटने पर चार पंचमक होंगे, जिन्हें क्रमशः Q_{n1} , Q_{n2} , Q_{n3} , Q_{n4} द्वारा व्यक्त किया जाता है।

3. **अष्टमक (Octiles):-** श्रेणी का आठ बराबर भागों में बाँटने पर सात अष्टमक होंगे जिन्हें - $O_1, O_2, O_3, \dots, O_7$
4. **दशमक (Deciles) :-** श्रेणी को दस बराबर भागों में बाँटने पर 9 दशमक होंगे, इन्हें D_1, D_2, \dots, D_9 द्वारा व्यक्त किया जाता है।
5. **शतमक (Percentiles):-** श्रेणी को सौ बराबर भागों में बाँटने पर 99 शतमक होंगे। इन्हें $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{99}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

द्वितीय चतुर्थक (Q_2) चौथे अष्टमक (Q_4) पाँचवें दशमक (D_5) तथा पचासवें शतमक (P_{50}) का मूल्य मध्यका मूल्य कहलाता है।

1.15 बहुलक (Mode)

किसी श्रेणी का वह मूल्य जिसकी आवृत्ति सबसे अधिक होती है, बहुलक कहलाता है। अंग्रेजी भाषा का 'Mode' शब्द फ्रेंच भाषा के 'La Mode' से बना है, जिसका अर्थ फैशन या रिवाज में होने से है। जिस वस्तु का फैशन होता है, अधिकांश व्यक्ति प्रायः उसी वस्तु का प्रयोग करते हैं, अतः सांख्यिकी में बहुलक श्रेणी वह चर मूल्य है जिसकी आवृत्ति सर्वाधिक होती है और जिसके चारों मर्दों के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति सबसे अधिक होती है। बाँडिंगटन के अनुसार- "बहुलक को महत्त्वपूर्ण प्रकार, रूप या पद के आकार या सबसे अधिक घनत्व वाले मूल्य के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।" बहुलक के जन्मदाता जिजेक के अनुसार- "बहुलक पद मूल्यों की किसी श्रेणी में सबसे अधिक बार आने वाला एक ऐसा मूल्य है, जिसके चारों ओर अन्य पद सबसे घने रूप में वितरित होते हैं।"

क्रॉक्सटन एवं काउडेन के शब्दों में- "बहुलक किसी आवृत्ति वितरण का वह मूल्य है जिसके चारों ओर मर्दों के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति बहुत अधिक होती है। यह मूल्य श्रेणी के मूल्यों का सर्वश्रेष्ठ चारों ओर मर्दों के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति बहुत अधिक होती है। यह मूल्य श्रेणी के मूल्यों का सर्वश्रेष्ठ प्रतिनिधि होता है।"

1.16 बहुलक की गणना (Calculation of Mode)

व्यक्तिगत श्रेणी (Individual Series) :- अवर्गीकृत तथ्यों के संबंध में बहुलक ज्ञात करने की तीन विधियाँ हैं:-

- i. निरीक्षण विधि।
- ii. व्यक्तिगत श्रेणी को खण्डित या सतत श्रेणी में परिवर्तित करके।

iii. माध्यों के अंतर्संबंध द्वारा।

निरीक्षण द्वारा (By Inspection) :- अवर्गीकृत तथ्यों का निरीक्षण करके यह निश्चित किया जाता है कि कौन सा मूल्य सबसे अधिक बार आता है अर्थात् कौन सा मूल्य सबसे अधिक प्रचलित है। जो मूल्य सबसे अधिक प्रचलित होता है, वही इन तथ्यों का बहुलक मूल्य होता है।

उदाहरण:- निम्नलिखित संख्याओं के समूहों के लिए बहुलक ज्ञात कीजिए।

- 3, 5, 2, 6, 5, 9, 5, 2, 8, 6, 2, 3, 5, 4, 7
- 51.6, 48.7, 53.3, 49.5, 48.9, 51.6, 52, 54.6, 54, 53.3,
- 80, 110, 40, 30, 20, 50, 100, 60, 40, 10, 100, 80, 120, 60, 50, 70

हल :- उपरोक्त संख्याओं को निरीक्षण करने से ज्ञात होता है कि –

- 5 संख्या सबसे अधिक बार (चार बार) आया है, अतः बहुलक = 5 है।
- 53.3 व 51.6 दोनों ही संख्याएँ दो-दो बार आवृत्त हुआ है, अतः यहाँ पर दो बहुलक (53.3 व 51.6) हैं। इस श्रेणी को द्वि-बहुलक (Bi-Modal) श्रेणी कहते हैं।
- 40, 50, 60, 80, 100 संख्याएँ दो-दो बार आवृत्त होती है। हम यह कह सकते हैं कि यहाँ पर पाँच बहुलक हैं। इसे बहु-बहुलक (Multi Modal) श्रेणी कहते हैं। इस स्थिति में यह कहना अधिक उपयुक्त होगा कि बहुलक विद्यमान नहीं है।

अवर्गीकृत तथ्यों का वर्गीकरण करके:- यदि प्रस्तुत मूल्यों की संख्या बहुत अधिक होती है तो बहुलक का निरीक्षण द्वारा निर्धारण करना सरल नहीं होता है। ऐसी स्थिति में व्यक्तिगत मूल्यों को आवृत्ति वितरण के रूप में खण्डित या सतत् श्रेणी में परिवर्तित कर लेते हैं। तत्पश्चात् खण्डित या सतत् श्रेणी से बहुलक निर्धारित करते हैं। बहुलक ज्ञात करने की यह रीति अधिक विश्वसनीय एवं तर्क संगत है।

माध्यों के अंतर्संबंध द्वारा- यदि समंक वितरण सममित है अथवा आंशिक रूप से विषम है तो सम्भावित बहुलक मूल्य का निर्धारण इस रीति द्वारा किया जाता है। एक सममित समंक वितरण में समान्तर माध्य, मध्यका व बहुलक (\bar{X}, M, Z) का मूल्य समान होता है अर्थात् $\bar{X} = M = Z$ यदि वितरण आंशिक रूप से विषम या असममित हो तो इन तीनों माध्यों के मध्य औसत संबंध इस प्रकार होता है-

$$(\bar{X} - Z) = 3(\bar{X} - M) \text{ or } Z = 3M - 2\bar{X}$$

$$\text{बहुलक} = 3x \text{ मध्यका} - 2x \text{ समान्तर माध्य}$$

खण्डित श्रेणी में बहुलक:- इस श्रेणी में बहुलक मूल्य निरीक्षण द्वारा एवं समूहीकरण द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

निरीक्षण द्वारा (By Inspection) :- यदि आवृत्ति बंटन नियमित हो तथा उनके पद मूल्य सजातीय हों तो निरीक्षण मात्र से ही बहुलक का निर्धारण किया जा सकता है। जिस मूल्य की आवृत्ति सबसे अधिक होती है वही मूल्य बहुलक माना जाता है। नियमित से आशय आवृत्तियों के ऐसे वितरण से है जहाँ प्रारम्भ में वे बढ़ते क्रम में हों, मध्य में अधिकतम एवं फिर वे घटते क्रम में हो जैसा कि निम्नलिखित उदाहरण से सरलता से समझा जा सकता है-

उदाहरण:- निम्नलिखित समकों से बहुलक की गणना कीजिए।

अंक (5 में से)	0	1	2	3	4	5
छात्रों की संख्या	5	8	13	5	2	1

हल :- उपर्युक्त आवृत्ति वितरण से स्पष्ट ज्ञात होता है कि 2 प्राप्तांक की आवृत्ति 13 है जो सर्वाधिक है, अतः 2 प्राप्तांक बहुलक होगा। यहाँ पर आवृत्तियाँ पहले बढ़ते क्रम में हैं, मध्य में सर्वाधिक तथा फिर घटते क्रम में है। अतः यह नियमित आवृत्ति वितरण का उदाहरण है।

समूहीकरण द्वारा (By Grouping) :- जब श्रेणी में अनियमितता हो अथवा दो या इससे अधिक मूल्यों की आवृत्ति सबसे अधिक हो तो यह निश्चित करना कठिन होता है कि किस मूल्य को बहुलक माना जाय। ऐसी स्थिति में 'समूहीकरण' द्वारा बहुलक ज्ञात करना उपयुक्त रहता है। समूहीकरण रीति द्वारा बहुलक ज्ञात करने के लिए निम्न तीन कार्य करने होते हैं:-

- समूहीकरण सारणी बनाना।
- विश्लेषण सारणी बनाना।
- बहुलक ज्ञात करना।

यहाँ पर हम लोग मात्र निरीक्षण विधि द्वारा बहुलक (Mode) ज्ञात करने की प्रक्रिया का अध्ययन करेंगे।

अखण्डित या सतत् श्रेणी (Continuous Series) में बहुलक ज्ञात करना:- सतत् श्रेणी में बहुलक निश्चित करते समय सर्वप्रथम निरीक्षण द्वारा सबसे अधिक आवृत्ति वाले पद को बहुलक वर्ग

के लिए चुन लेते हैं। बहुलक वर्ग में बहुलक मूल्य ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्रों का प्रयोग किया जा सकता है:-

उपर्युक्त सूत्रों में प्रयुक्त विभिन्न चिन्हों के अर्थ इस प्रकार हैं:-

- Z = बहुलक
- L_1 = बहुलक वर्ग की अधर (Lower Limit) सीमा।
- i = बहुलक वर्ग का वर्ग विस्तार या वर्गान्तर।
- D_1 = प्रथम वर्ग अंतर (Delta) = Difference one ($f_1 - f_0$)
- D_2 = द्वितीय वर्ग अंतर (Delta) = Difference two ($f_1 - f_2$)

उदाहरण- निम्नलिखित समंकों से बहुलक मूल्य ज्ञात कीजिए:-

वर्ग आकार -	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
बारम्बारता	2	6	15	8	6

इस श्रेणी के निरीक्षण से ज्ञात होता है कि श्रेणी का 10-15 वर्ग बहुलक वर्ग है, क्योंकि इस वर्ग की आवृत्ति सर्वाधिक है। इस प्रकार

$$Z = L_1 + \frac{D_1}{D_1 + D_2} \cdot xi \quad \text{यहाँ} \quad D_1 = f_1 - f_0 = 15 - 6 = 9$$

$$D_2 = f_1 - f_2 = 15 - 8 = 7$$

$$= 10 + \frac{9}{9+7} \cdot 5$$

$$= 10 + \frac{45}{16}$$

$$= 10 + 2.81$$

$$= 12.81$$

$$\text{बहुलक} = 12.81$$

बहुलक की प्रमुख विशेषताएँ (Principal Characteristics of Mode)

1. बहुलक मूल्य पर असाधारण इकाईयों का प्रभाव नहीं पड़ता है अर्थात् इस माध्य पर श्रेणी के उच्चतम व निम्नतम अंकों का बहुत कम प्रभाव पड़ता है।
2. वास्तविक बहुलक के निर्धारण के लिए पर्याप्त गणना की आवश्यकता होती है। यदि आवृत्ति वितरण अनियमित है तो बहुलक का निर्धारण करना भी कठिन होता है।
3. बहुलक सर्वाधिक घनत्व वाला बिन्दु होता है, अतः श्रेणी के वितरण का अनुमान सरलता से लगाया जा सकता है।
4. बहुलक के लिए बीजगणितय विवेचन करना संभव नहीं होता।
5. सन्निकट बहुलक आसानी से ज्ञात किया जा सकता है।

बहुलक के गुण (Advantages of Mode)

- i. **सरलता:-** बहुलक को समझना व प्रयोग करना दोनों सरल हैं। कभी-कभी इसका पता निरीक्षण द्वारा ही लगाया जा सकता है।
- ii. **श्रेष्ठ प्रतिनिधित्व:-** बहुलक मूल्य के चारों ओर समंक श्रेणी के अधिकतम मूल्य केन्द्रित होते हैं। अतः समग्र के लक्षणों तथा रचना पर भी कुछ प्रकाश पड़ता है।
- iii. **थोड़े मर्दों की जानकारी से भी बहुलक गणना सम्भव:-** बहुलक को गणना के लिए सभी मर्दों की आवृत्तियों जानना आवश्यक नहीं केवल बहुलक वर्ग के पहले और बाद वाले वर्ग की आवृत्तियों ही पर्याप्त है।
- iv. **बिन्दु रेखीय प्रदर्शन सम्भव:-** बहुलक का प्रदर्शन रेखा चित्र से संभव है।
- v. **चरम मूल्यों से कम प्रभावित:-** इसके मूल्य पर चरम मर्दों का प्रभाव नहीं पड़ता क्योंकि यह सभी मूल्यों पर आधारित नहीं होता है।
- vi. **सर्वाधिक उपयोगी मूल्य:-** बहुलक एक व्यावहारिक माध्य है, जिसका सार्वभौमिक उपयोग है।
- vii. **विभिन्न न्यादर्शों में समान निष्कर्ष:-** समग्र से सदैव निदर्शन द्वारा चाहे जितना न्यादर्श लिये जाय उनसे प्राप्त बहुलक समान रहता है।

बहुलक के दोष

- i. **अनिश्चित तथा अस्पष्ट:-** बहुलक ज्ञात करना अनिश्चित तथा अस्पष्ट रहता है। कभी-कभी एक ही समंकमाला से एक से अधिक बहुलक उपलब्ध होते हैं।
- ii. **चरम मूल्यों का महत्त्व नहीं:-** बहुलक में चरम मूल्यों को कोई महत्त्व नहीं दिया जाता।

- iii. **बीजगणितीय विवेचन कठिन:-** बहुलक का बीजगणितीय विवेचन नहीं किया जा सकता, अतः यह अपूर्ण है।
- iv. **वर्ग विस्तार का अधिक प्रभाव:-** बहुलक की गणना में वर्ग विस्तार का बहुत प्रभाव पड़ता है। भिन्न-भिन्न वर्ग विस्तार के आधार पर वर्गीकरण करने पर बहुलक भी भिन्न-भिन्न आते हैं।
- v. **कुल योग प्राप्त करना कठिन:-** बहुलक को यदि मर्दों की संख्या से गुणा कर दिया जाय तो मर्दों के कुल मूल्यों का योग प्राप्त नहीं किया जा सकता।
- vi. **क्रमानुसार रखना:-** इसमें मर्दों को क्रमानुसार रखना आवश्यक है, इसके बिना बहुलक ज्ञात करना सम्भव नहीं होता है।

1.17 समान्तर माध्य , मध्यका तथा बहुलक के बीच संबंध

एक सममित श्रेणी (Symmetrical Series) ऐसी श्रेणी होती है, जिसमें समान्तर माध्य , मध्यका व बहुलक का एक ही मूल्य होता है। एक विषम श्रेणी में तीनों माध्य समान नहीं होते हैं, परन्तु विषम श्रेणी में भी मध्यका, समान्तर माध्य व बहुलक के बीच की दूरी की औसतन एक तिहाई होती है।

इसका सूत्र इस प्रकार है:-

$$Z = \bar{X} - 3(\bar{X} - M) \text{ or } Z = 3M - 2\bar{X}$$

$$M = Z + \frac{2}{3}(\bar{X} - Z)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{2}(3M - Z)$$

अभ्यास प्रश्न

- एकश्रेणी (Series) में समान्तर माध्य , मध्य का व बहुलक का एक ही मूल्य होता है।
-किसी आवृत्ति वितरण का वह मूल्य) है जिसके चारों ओर मर्दों के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति बहुत अधिक होती है।
- सौ बराबर भागों में बाँटने वाले मूल्यहकहलाता है।

9.समंक श्रेणी का वह चर मूल्य है जो समूह को दो बराबर भागों में विभाजित करता है।
10. चार भागों में बँटने वाला मूल्यचकहलाता है।

1.18 सारांश

प्रस्तुत इकाई में आपने सांख्यिकी का अर्थ तथा वर्णनात्मक सांख्यिकी के रूप में केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापकों (Measures of Central Tendency) में समांतर माध्य, मध्यका व बहुलक का अध्ययन किया। इन सभी अवधारणाओं के बारे में संक्षिप्त विवरण दिया जा रहा है।

सांख्यिकी अनुमानों और संभावनाओं का विज्ञान है तथा यह गणना का विज्ञान है। सांख्यिकी को सही अर्थ में माध्यों का विज्ञान कहा जा सकता है।

वर्णात्मक सांख्यिकी, किसी क्षेत्र के भूतकाल तथा वर्तमान काल में संकलित तथ्यों का अध्ययन करता है और इनका उद्देश्य विवरणात्मक सूचना प्रदान करना होता है। केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप, विवरणात्मक या वर्णात्मक सांख्यिकी के उदाहरण हैं।

एक समंक श्रेणी की केन्द्रीय प्रवृत्ति का आशय उस समंक श्रेणी के अधिकांश मूल्यों की किसी एक मूल्य के आस-पास केन्द्रित होने की प्रवृत्ति से है, जिसे मापा जा सके और इस प्रवृत्ति के माप को ही माध्य कहते हैं।

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के उद्देश्य एवं कार्य हैं- सामग्री को संक्षिप्त रूप में प्रस्तुत करना, तुलनात्मक अध्ययन के लिए, समूह का प्रतिनिधित्व, अंक गणितीय क्रियाएँ, भावी योजनाओं का आधार, माध्यों के मध्य पारस्परिक संबंध ज्ञात करने के लिए आदि।

किसी भी आदर्श माध्य में गुण होनी चाहिए:- प्रतिनिधित्व, स्पष्टता एवं स्थिरता, निश्चित निर्धारण, सरलता व शीघ्रता, परिवर्तन का न्यूनतम प्रभाव, निरपेक्ष संख्या आदि।

सांख्यिकीय में मुख्यतः निम्न माध्यों का प्रयोग होता है:-

IV. स्थिति सम्बन्धी माध्य (Averages of position)

- बहुलक (Mode)
- मध्यका (Median)

V. गणित सम्बन्धी माध्य (Mathematical Average)

- समान्तर माध्य (Arithmetic Average or mean)
- गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)

- c. हरात्मक माध्य (Harmonic Mean)
- d. द्विघात या वर्गीकरण माध्य (Quadratic Mean)

VI. व्यापारिक माध्य (Business Average)

- a. चल माध्य (Moving Average)
- b. प्रगामी माध्य (Progressive Average)
- c. संग्रहीत माध्य (Composite Average)

किसी समंक श्रेणी का समान्तर माध्य उस श्रेणी के मूल्यों को जोड़कर उसकी संख्या का भाग देने से प्राप्त होता है। समान्तर माध्य दो प्रकार के होते हैं-

- 3. सरल समान्तर माध्य (Simple Arithmetic Mean)
- 4. भारित समान्तर माध्य (Weighted Arithmetic Mean)

समान्तर माध्य की गणना करने के लिए दो रीतियों का प्रयोग किया जाता है:-

- iii. प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)
- iv. लघु रीति (Short-cut Method)

मध्यका समंक श्रेणी का वह चर मूल्य है जो समूह को दो बराबर भागों में विभाजित करता है, जिसमें एक भाग में मूल्य मध्यका से अधिक और दूसरे भाग में सभी मूल्य उससे कम होते हैं। जिन तथ्यों की व्यक्तिगत रूप से पृथक-पृथक तुलना नहीं की जा सकती अथवा जिन्हें समूहों में रखा जाना आवश्यक है, उनकी तुलना के लिए मध्यका का प्रयोग बहुत उपयोगी है। इसके द्वारा ऐसी समस्याओं का अध्ययन भी संभव होता है, जिन्हें परिणाम में व्यक्त नहीं किया जा सकता है।

जिस प्रकार मध्यका द्वारा एक श्रेणी की अनुविन्यासित मदों को दो बराबर भागों में बाँटा जाता है, उसी प्रकार श्रेणी को चार, पाँच, आठ, दस व सौ बराबर भागों में बाँटा जा सकता है। चार भागों में बाँटने वाला मूल्य चतुर्थक (Quartiles), पाँच भागों में बाँटने वाला मूल्य पंचमक (Quintiles), आठ भागों वाले मूल्य अष्टमक (Octiles), दस वाले दशमक (Deciles) व सौ बराबर भागों में बाँटने वाले मूल्य शतमक (Percentiles) कहलाते हैं। इन विभिन्न मापों का प्रयोग सांख्यिकीय विश्लेषण में किया जाता है।

बहुलक किसी आवृत्ति वितरण का वह मूल्य है जिसके चारों ओर मदों के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति बहुत अधिक होती है। यह मूल्य श्रेणी के मूल्यों का सर्वश्रेष्ठ चारों ओर मदों के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति बहुत अधिक होती है। यह मूल्य श्रेणी के मूल्यों का सर्वश्रेष्ठ प्रतिनिधि होता है।

अवर्गीकृत तथ्यों के संबंध में बहुलक ज्ञात करने की तीन विधियाँ हैं:-

- i. निरीक्षण विधि।
- ii. व्यक्तिगत श्रेणी को खण्डित या सतत श्रेणी में परिवर्तित करके।
- iii. माध्यों के अंतर्संबंध द्वारा।

एक सममित श्रेणी (Symmetrical Series) ऐसी श्रेणी होती है, जिसमें समान्तर माध्य, मध्यका व बहुलक का एक ही मूल्य होता है। एक विषम श्रेणी में तीनों माध्य समान नहीं होते हैं, परन्तु विषम श्रेणी में भी मध्यका, समान्तर माध्य व बहुलक के बीच की दूरी की औसतन एक तिहाई होती है।

इसका सूत्र है:- $Z = \bar{X} - 3(\bar{X} - M)$ or $Z = 3M - 2\bar{X}$

1.19 शब्दावली

1. **सांख्यिकी (Statistics):** सांख्यिकी अनुमानों और संभावनाओं का विज्ञान है तथा यह गणना का विज्ञान है। सांख्यिकी को सही अर्थ में माध्यों का विज्ञान कहा जाता है।
2. **वर्णात्मक सांख्यिकी (Descriptive Statistics):** वर्णात्मक सांख्यिकी संकलित तथ्यों का विवरणात्मक सूचना प्रदान करना होता है। केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप, विवरणात्मक या वर्णात्मक सांख्यिकी के उदाहरण हैं।
3. **केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप (Measures of Central Tendency):** एक समंक श्रेणी की केन्द्रीय प्रवृत्ति का आशय उस समंक श्रेणी के अधिकांश मूल्यों की किसी एक मूल्य के आस-पास केन्द्रित होने की प्रवृत्ति से है, जिसे मापा जा सके और इस प्रवृत्ति के माप को माध्य भी कहते हैं।
4. **मध्यका (Median):** मध्यका समंक श्रेणी का वह चर मूल्य है जो समूह को दो बराबर भागों में विभाजित करता है।
5. **चतुर्थक (Quartiles):** चार भागों में बँटने वाला मूल्य चतुर्थक (Quartiles)।
6. **पंचमक (Quintiles):** पाँच भागों में बँटने वाला मूल्य पंचमक (Quintiles)।
7. **अष्टमक (Octiles):** आठ भागों वाले मूल्य अष्टमक (Octiles)।
8. **दशमक (Deciles):** दस भागों वाले मूल्य दशमक (Deciles)।
9. **शतमक (Percentiles):** सौ बराबर भागों में बँटने वाले मूल्य शतमक (Percentiles)।
10. **बहुलक (Mode):** बहुलक किसी आवृत्ति वितरण का वह मूल्य है जिसके चारों ओर मर्दों के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति बहुत अधिक होती है।

1.20 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर

1. समान्तर माध्य
2. 2. शून्य
3. 3. 46
4. 4. विवरणात्मक या वर्णात्मक
5. 5. माध्यों
6. 6. सममित
7. 7. बहुलक
8. 8. शतमक (Percentiles)
9. 9. मध्यका
10. 10. चतुर्थक (Quartiles)

1.21 संदर्भ ग्रन्थ सूची/ पाठ्य सामग्री

1. Best, John W. & Kahn (2008). Research in Education, New Delhi, PHI.
2. Good, Carter, V. (1963). Introduction to Educational Research, New York, Rand Mc Nally and company.
3. Koul, Lokesh (2002). Methodology of Educational Research New Delhi, Vikas Publishing Pvt. Ltd.
4. Garret, H.E. (1972). Statistics in Psychology and Education, New York, Vakils, Feffers and Simans Pvt. Ltd.
5. सिंह, ए०के० (2007) : मनोविज्ञान, समाजशास्त्र तथा शिक्षा में शोध विधियाँ, नई दिल्ली, मोतीलाल बनारसी दास
6. गुप्ता, एस०पी० (2008) : मापन एवं मूल्यांकन, इलाहाबाद, शारदा पब्लिकेशन
7. शर्मा, आर०ए० (2001) : शिक्षा अनुसंधान के मूल तत्व एवं शोध प्रक्रिया, मेरठ, आर०लाल० पब्लिकेशन्स

1.22निबंधात्मक प्रश्न

1. सांख्यिकी का अर्थ बताइए तथा वर्णनात्मक सांख्यिकी के महत्त्व का वर्णन कीजिए।
2. केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापकों विभिन्न मापकों की तुलना कीजिए।
3. केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापकों के महत्त्व का वर्णन कीजिए।
4. निम्नलिखित समकों से समान्तर माध्य, मध्यका, व बहुलक का मूल्य ज्ञात कीजिए:-
(उत्तर : समान्तर माध्य =67.5, मध्यका = 69.32, बहुलक = 72.96)

वर्ग अंतराल	90- 94	85- 89	80- 84	75- 79	70- 74	65- 69	60- 64	55- 59	50- 54	45- 49	40- 44
बारंबारता	1	4	2	8	14	6	6	6	4	3	3

इकाई 2 - विचरणशीलता के मापक (Measures of Variability)

- 2.1 प्रस्तावना
- 2.2 उद्देश्य
- 2.3 विचरणशीलता अथवा अपकिरण का अर्थ
- 2.4 अपकिरण की मापें
- 2.5 अपकिरण के उद्देश्य एवं महत्त्व
- 2.6 अपकिरण के विभिन्न माप
- 2.7 विस्तार
- 2.8 अन्तर चतुर्थक विस्तार
- 2.9 शतमक विस्तार
- 2.10 चतुर्थक विचलन या अर्द्ध अन्तर-चतुर्थक विस्तार
- 2.11 माध्य विचलन या प्रथम घात का अपकिरण
- 2.12 प्रमाप विचलन
- 2.13 अपकिरण के विभिन्न मापों के मध्य संबंध
- 2.14 मानक त्रुटि
- 2.15 सारांश
- 2.16 शब्दावली
- 2.17 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर
- 2.18 संदर्भ ग्रन्थ सूची/ पाठ्य सामग्री
- 2.19 निबंधात्मक प्रश्न

2.1 प्रस्तावना

इससे पहले आपने केन्द्रीय प्रवृत्ति के बारे में यह जाना कि माध्य एक श्रेणी का प्रतिनिधि मूल्य होता है। यह मूल्य उस श्रेणी की माध्य स्थिति या सामान्य स्थिति का परिचायक मात्र होता है। माध्य मूल्य के आधार पर समक श्रेणी की बनावट, संरचना, पद मूल्यों का माध्य मूल्य के संदर्भ में विखराव या फैलाव आदि के संदर्भ में जानकारी करना संभव नहीं है। अतः केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों

के आधार पर सांख्यिकीय तथ्यों का विश्लेषण व निष्कर्ष प्रायः अशुद्ध व भ्रामक होता है। सांख्यिकीय विश्लेषण की शुद्धता के लिए विचरणशीलता के मापक को समझना अत्यंत आवश्यक है। प्रस्तुत इकाई में आप विचरणशीलता के मापकों, चतुर्थांक, शतांक तथा प्रमुख सांख्यिकियों के प्रमाप त्रुटियों का अध्ययन करेंगे।

2.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययनोपरांत आप-

1. विचरणशीलता अथवा अपकिरण का अर्थ बता पायेंगे।
2. विचरणशीलता के महत्त्व का वर्णन कर सकेंगे।
3. विचरणशीलता की प्रकृति को बता पायेंगे।
4. विचरणशीलता के संप्रत्यय की व्याख्या कर सकेंगे।
5. विचरणशीलता के विभिन्न मापकों का परिकलन कर सकेंगे।
6. चतुर्थांक मापक का परिकलन कर सकेंगे।
7. शतांक मापक का परिकलन कर सकेंगे।
8. प्रमुख सांख्यिकियों के प्रमाप त्रुटियों का परिकलन कर सकेंगे।
9. विचरणशीलता के विभिन्न मापकों की तुलना कर सकेंगे।

2.3 विचरणशीलता अथवा अपकिरण का अर्थ (Meaning of Variability or Dispersion)

विचरणशीलता अथवा अपकिरण का अर्थ फैलाव, विखराव या प्रसार है। अपकिरण किसी श्रेणी के पद-मूल्यों के विखराव या विचरण की सीमा बताता है। जिस सीमा तक व्यक्तिगत पद मूल्यों में भिन्नता होती है, उसके माप को अपकिरण कहते हैं। ब्रुक्स तथा डिक के मतानुसार "एक केन्द्रीय मूल्य के दोनों ओर पाये जाने वाले चर मूल्यों के विचलन या प्रसार की सीमा ही अपकिरण है।" अपकिरण (Dispersion) को विखराव (Scatter), प्रसार (Spread) तथा विचरण (Variation) आदि नामों से जाना जाता है।

2.4 अपकिरण की मापें (Measures of Dispersion)

अपकिरण को निम्न प्रकार से मापा जा सकता है:-

1. **निरपेक्ष माप (Absolute Measures) :-** यह माप अपकिरण को बतलाता है और उसी इकाई में बताया जाता है, जिसमें मूल समंक व्यक्त किए गए हैं, जैसे- रूपये, मीटर, लीटर इत्यादि। निरपेक्ष माप दो श्रेणियों की तुलना करने हेतु प्रयोग नहीं किया जा सकता।
2. **सापेक्ष माप (Relative Measures):-** सापेक्ष अपकिरण कुल अपकिरण का किसी प्रमाप मूल्य से विभाजन करने से प्राप्त होता है और अनुपात या प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है। दो दो से अधिक श्रेणियों की तुलना करने हेतु सापेक्ष माप का ही प्रयोग किया जाता है।

2.5 अपकिरण के उद्देश्य एवं महत्त्व (Objectives and importance of Dispersion)

अपकिरण के विभिन्न माप के निम्नलिखित उद्देश्य एवं महत्त्व हैं –

- i. समंक श्रेणी के माध्य से विभिन्न पद-मूल्यों की औसत दूरी ज्ञात करना।
- ii. समंक श्रेणी की बनावट के बारे में जानकारी प्रदान करना अर्थात् यह ज्ञात करना कि माध्य के दोनों ओर पद-मूल्यों का विखराव या फैलाव कैसा है।
- iii. समंक- श्रेणी के विभिन्न पद-मूल्यों का सीमा विस्तार ज्ञात करना।
- iv. दो या दो से अधिक समंक श्रेणियों में पायी जाने वाली असमानताओं या बनावट में अन्तर का तुलनात्मक अध्ययन करना तथा यह निश्चित करना कि किस समंक श्रेणी में विचरण की मात्रा अधिक है।
- v. यह जाँच ना कि माध्य द्वारा समंक श्रेणी का किस सीमा तक प्रतिनिधित्व होता है। इस प्रकार अपकिरण की मापें माध्यों की अनुपूरक होती हैं।

2.6 अपकिरण के विभिन्न माप (Different Measures of Dispersion):

अपकिरण ज्ञात करने की विभिन्न रीतियाँ निम्न चार्ट में प्रस्तुत है:-

सीमा रीतियाँ (Methods of Limits)	विचलन माध्य रीतियाँ (Methods of Average Deviation)
-------------------------------------	---

1. विस्तार (Range)	1. माध्य विचलन (Mean Deviation)
2. अन्तर-चतुर्थक विस्तार (Inter-Quartile Range)	2. प्रमाप विचलन (Standard Deviation)
3. शतमक विस्तार (Percentile Range)	
4. चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)	

2.7 विस्तार (Range)

किसी समंक श्रेणी में सबसे अधिक मूल्य (H) और सबसे छोटे मूल्य या न्यूनतम मूल्य (L) के अन्तर को विस्तार कहते हैं। यह अन्तर यदि कम है तो श्रेणी नियमित या स्थिर कहलायेगी। इसके विपरीत यदि यह अन्तर अधिक है तो श्रेणी अनियमित कहलाती है। यह अपकिरण ज्ञात करने की सबसे सरल परन्तु अवैज्ञानिक रीति है।

विस्तार की परिगणना:- अधिकतम और न्यूनतम मूल्यों का अन्तर विस्तार कहलाता है। विस्तार ज्ञात करते समय आवृत्तियों पर ध्यान नहीं दिया जाता है। विस्तार की परिगणना केवल मूल्यों (मापों या आकारों) के अन्तर के आधार पर ही की जाती है।

$$\text{विस्तार} = \text{अधिकतम मूल्य} - \text{न्यूनतम मूल्य}$$

$$\text{Range} = \text{Highest Value (H)} - \text{Lowest Value (L)}$$

विस्तार गुणांक (Coefficient of Range):- विस्तार का माप निरपेक्ष होता है। इसलिए इसकी तुलना अन्य श्रेणियों से ठीक प्रकार नहीं की जा सकती। इसे तुलनीय बनाने हेतु यह आवश्यक है कि इसे सापेक्ष रूप में व्यक्त किया जाय। इसके लिए विस्तार गुणांक ज्ञात किया जाता है, जिसका सूत्र निम्न है:-

$$\text{विस्तार गुणांक (Coefficient of Range)} = \frac{H - L}{H + L}$$

उदाहरण 01:- निम्नलिखित संख्याओं के समूहों में विस्तार (Range) की गणना कर उनकी तुलना कीजिए।

$$A = 7, 8, 2, 3, 4, 5$$

$$B = 6, 8, 10, 12, 5, 8$$

$$C = 9, 10, 12, 13, 15, 20$$

हल: विस्तार (Range) = अधिकतम मूल्य (H) – न्यूनतम मूल्य (L)

$$A = 8 - 2 = 6$$

$$B = 12 - 5 = 7$$

$$C = 20 - 9 = 11$$

A, B और C संख्याओं के तीन समूहों की तुलना हेतु विस्तार गुणांक (Coefficient of Range) की परिगणना करनी होगी, जो निम्नवत् है:-

$$\text{विस्तार गुणांक (Coefficient of Range)} = \frac{H - L}{H + L}$$

$$A = \frac{8 - 2}{8 + 2} = \frac{6}{10} = 0.6$$

$$B = \frac{12 - 5}{12 + 5} = \frac{7}{17} = 0.41$$

$$C = \frac{20 - 9}{20 + 9} = \frac{11}{29} = 0.37$$

अतः विस्तार गुणांक A का 0.60, B का 0.41 तथा C का 0.37 है। स्पष्ट है A में विचरणशीलता सर्वाधिक है, जबकि C में न्यूनतम है।

विस्तार के गुण (Merits of Range):-

- इसकी गणना सरल है।
- यह उन सीमाओं को स्पष्ट कर देता है, जिनके मध्य पदों के मूल्य में बिखराव है, अतः यह विचलन का एक विस्तृत चित्र दर्शाता है।
- विस्तार की गणना के लिए आवृत्तियों की आवश्यकता नहीं होती, केवल मूल्यों पर ही ध्यान दिया जाता है। अतः आवृत्तियों से प्रभावित नहीं होता है।

विस्तार के दोष (Demerits of Range):-

- विस्तार एक अवैज्ञानिक माप है, क्योंकि इसमें माध्यों की उपेक्षा की जाती है।
- विस्तार अपकिरण का एक अनिश्चित माप है।
- विस्तार में श्रेणी के सभी मूल्यों पर ध्यान नहीं दिया जाता अतः इसे सभी मूल्यों का प्रतिनिधि मूल्य नहीं कहा जा सकता।

2.8 अन्तर चतुर्थक विस्तार (Inter Quartile Range)

किसी भी श्रेणी के तृतीय चतुर्थक (Q_3) तथा प्रथम चतुर्थक (Q_1) के अन्तर को अन्तर चतुर्थक विस्तार कहते हैं। यह माप आंशिक रूप से विस्तार (Range) के समान ही है। इस माप के अन्तर्गत मध्य की 50% मर्दों के मूल्यों को ही ध्यान में रखा जाता है। इसकी गणना करते समय आवृत्तियों को भी महत्त्व दिया जाता है, जबकि विस्तार में आवृत्तियों को ध्यान में नहीं रखते हैं। अन्तर-चतुर्थक विस्तार अपकिरण का माप होने के साथ-साथ स्थिति का भी मापक है। इसकी परिगणना विधि निम्नवत् है:-

- सर्वप्रथम समंक श्रेणी के प्रथम एवं तृतीय चतुर्थक ज्ञात किये जायेंगे।
- तत्पश्चात् इसे ज्ञात करने हेतु निम्न सूत्र का प्रयोग करेंगे:-

$$\text{अन्तर चतुर्थक विस्तार (Inter -Quartile Range, IQR)} = Q_3 - Q_1$$

उदाहरण 02:- एक परीक्षा में 40 परीक्षार्थियों द्वारा प्राप्त प्राप्तांकों का अन्तर-चतुर्थक विस्तार ज्ञात कीजिए।

Find out Inter-Quartile Range from the following data regarding marks obtained by 40 students in an examination.

Marks	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	Total
No. of Examinees	5	8	12	9	6	40

हल:- सर्वप्रथम श्रेणी के विभिन्न वर्गों की वास्तविक सीमाएँ ज्ञात कर निम्न प्रकार लिखा जाएगा:-

Marks (X)	No. of Examinees (f)	संचयी बारबारता Cumulative frequency
--------------	-------------------------	--

		(cf)
0.5-10.5	5	5
10.5- 20.5	6	13
20.5- 30.5	12	25
30.5- 40.5	9	34
40.5 – 50.5	6	40

<p>$Q_1 = N/4$ वॉ पद $\frac{40}{4} = 10$ वॉ पद यह वर्ग अन्तराल (10.5- 20.5) के मध्य आता है। सूत्र में सभी मानों को रखने पर</p> $Q_1 = L_1 + \frac{i}{f}(q_1 - c)$ $= 10.5 + \frac{10}{8}(10 - 5)$ $= 10.5 + 6.25 \text{ or } 16.75 \text{ अंक}$	<p>$Q_3 = 3N/4$ वॉ पद या $\frac{3 \times 40}{4} = 30$ वॉ पद यह वर्ग अन्तराल (30.5-40.5) के मध्य आता है।</p> $Q_3 = L_1 + \frac{i}{f}(q_3 - c)$ $= 30.5 + \frac{10}{9}(30 - 25)$ $= 30.5 + 5.56 \text{ or } 36.06 \text{ अंक}$
---	---

अन्तर चतुर्थक विस्तार (IQR) = 36.06-16.75 अथवा 19.31 अंक

अन्तर चतुर्थक विस्तार (IQR) का गुण (Merits of IQR):

- i. विस्तार की भौति इसकी गणना सरल है।
- ii. इसमें चरम मूल्यों का कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

अन्तर चतुर्थक विस्तार (IQR) दोष (Demerits of IQR):

- i. इसे प्रतिनिधि माप नहीं कहा जा सकता क्योंकि यह माप श्रेणी के मध्य के 50 प्रतिशत मूल्यों पर आधारित होता है।
- ii. यह माप बनावट श्रेणी की बनावट को स्पष्ट नहीं करता है।
- iii. इस माप का बीजगणितीय विवेचन संभव नहीं है।
- iv. अतः अन्तर-चतुर्थक विस्तार अपकिरण का संतोषजनक माप नहीं है।

2.9 शतमक विस्तार (Percentile Range)

यह आंशिक विस्तार का ही अन्य माप है। इसका उपयोग शैक्षणिक व मनोवैज्ञानिक मापों में अधिक होता है। शतमक विस्तार P_{90} व P_{10} का अन्तर होता है। यह माप श्रेणी के 80% मूल्यों पर आधारित होता है। अतः यदि मध्य का 80% मूल्य ज्ञात हो तो भी शतमक विस्तार ज्ञात किया जा सकता है। इसे ज्ञात करने हेतु हम निम्न सूत्र का प्रयोग करेंगे:-

$P.R. = P_{90} - P_{10}$ (P.R. = Percentile Range, शतमक विस्तार) इस माप को दशमक विस्तार ($D_9 - D_1$) भी कहा जा सकता है, क्योंकि P_{90} तथा P_{10} क्रमशः D_9 तथा D_1 ही होते हैं।

अतः $D.R. = D_9 - D_1$ (D.R. = Decile Range = दशमक विस्तार)

D_9 = नवम दशमक (9th Decile) तथा D_1 = प्रथम दशमक (1st Decile)

उदाहरण 03:- उदाहरण संख्या 02 में प्रस्तुत समकों से शतमक विस्तार (Percentile Range) की गणना कीजिए।

हल:-

$P_{10} = \frac{10N}{100} \text{ or } \frac{10 \times 40}{100}$ <p>= 4th पद यह संचयी बारंबारता 5 वाले वर्ग अन्तराल (0.5-10.5) के मध्य आता है।</p> $P_{10} = L_1 + \frac{i}{f}(P_{10} - c)$ $= 0.5 + \frac{10}{5}(4 - 0)$ $= 0.5 + 8 \text{ अथवा } 8.5 \text{ अंक}$ $P.R. = P_{90} - P_{10} = 43.83 - 8.5$ $= 35.33 \text{ अंक}$	$P_{90} = \frac{90N}{100} \text{ या } \frac{90 \times 40}{100}$ <p>= 36 वाँ पद 1 यह 40 संचयी बारंबारता वाले वर्ग अन्तराल (40.5-50.5) के मध्य आता है।</p> $P_{90} = L_1 + \frac{i}{f}(P_{90} - c)$ $= 40.5 + \frac{10}{6}(36 - 35)$ $= 40.5 + 3.33$ $= 43.83 \text{ अंक}$
--	--

शतमक विस्तार के गुण (Merits of PR):-

1. यह रीति विस्तार एवं अन्तर-चतुर्थक विस्तार से श्रेष्ठ मानी जाती है, क्योंकि यह माप श्रेणी के 80% मूल्यों पर आधारित होता है।
2. इसे अधिक सरलता से समझा जा सकता है।

शतमक विस्तार के दोष (Demerits of PR):-

1. एक भी मद के सम्मिलित करने व हटाने से शतमक विस्तार प्रभावित होता है।
2. इसके अतिरिक्त इससे श्रेणी की बनावट के बारे में कोई जानकारी नहीं मिलती है और न ही इसका बीजगणितीय विवेचन संभव है।

2.10 चतुर्थक विचलन या अर्द्ध अन्तर-चतुर्थक विस्तार (Quartile Deviation or Semi Inter-Quartile Range) :

चतुर्थक विचलन श्रेणी के चतुर्थक मूल्यों पर आधारित अपकिरण का एक माप है। यह श्रेणी के तृतीय व प्रथम चतुर्थक के अन्तर का आधा होता है। इसलिए इसे अर्द्ध अन्तर-चतुर्थक विस्तार भी कहते हैं। यदि कोई श्रेणी नियमित अथवा सममितीय हो तो मध्यक (M) , तृतीय चतुर्थक (Q₃) तथा प्रथम चतुर्थक (Q₁) के ठीक बीच होगा। इसके लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

$$\text{चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation or Q.D.)} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}, \quad Q_3 = \text{तृतीय चतुर्थक}$$

$$Q_1 = \text{प्रथम चतुर्थक}$$

चतुर्थक विचलन का गुणांक (Coefficient of Quartile Deviation)

$$\text{Coefficient of Q.D.} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \times \frac{2}{Q_3 + Q_1} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

उदाहरण 04 :- निम्न समकों के आधार पर चतुर्थक विचलन एवं उसका गुणांक ज्ञात कीजिए।

From the following data find Quartile Deviation and its Coefficient

अंक (X)	4	6	8	10	12	14	16
------------	---	---	---	----	----	----	----

बारंबारता (f)	2	4	5	3	2	1	4
संचयी बारंबारता (cf)	2	6	11	14	16	17	21

हल:-

$Q_1 = \frac{N+1}{4} \text{ वॉ पद}$ $= \frac{21+1}{4} \text{ वॉ पद}$ $= 5.5 \text{ वॉ पद}$ $= 6$ $Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{14-6}{2} = 4$ $Q.D. \text{ गुणांक} = \frac{14-6}{14+6} = 0.40$	$Q_3 = \frac{D(N+1)}{4} \text{ वॉ पद}$ $= \frac{3(21+1)}{4} \text{ वॉ पद}$ $= 16.5 \text{ वॉ पद}$ $= 17$
---	--

वर्गीकृत आंकड़ों का Q.D. निकालने के लिए शतमक या दशमक विस्तार की तरह ही प्रक्रिया अपना कर निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

$$Q_1 = L_1 + \frac{i}{f}(q_1 - C)$$

$$Q_3 = L_1 + \frac{i}{f}(q_3 - C)$$

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

चतुर्थांक विचलन के गुण (Merits of QR):-

1. चतुर्थांक विचलन की गणना सरल है तथा इसे शीघ्रता से समझा जा सकता है, क्योंकि इसकी गणना में जटिल गणितीय सूत्रों का प्रयोग नहीं करना पड़ता है।
2. यह श्रेणी के न्यूनतम 25% तथा अधिकतम 25% मूल्यों को छोड़ देता है। अतः यह अपक्रियण के अन्य मापों की अपेक्षा चरम मूल्यों द्वारा कम प्रभावित होता है।
3. यद्यपि यह श्रेणी की बनावट पर प्रकाश नहीं डालता फिर भी श्रेणी के उन 50% मूल्यों का विस्तार परिष्कृत रूप से प्रस्तुत करता है, जो चरम मूल्यों से प्रभावित नहीं होते हैं।

चतुर्थांक विचलन के दोष (Demerits of QR):-

1. यह पदों के बिखराव का प्रदर्शन करने में असमर्थ है।
2. यह चरम मूल्यों को महत्त्व नहीं देता है।
3. इसके आधार पर बीजगणितीय रीतियों का प्रयोग करके विश्लेषण करना संभव नहीं है।
4. निदर्शन के उच्चावचनों (Fluctuations) से यह बहुत अधिक प्रभावित होता है।

इन दोषों को दूर करने के उद्देश्य से ही माध्य विचलन और प्रमाप विचलन की गणना की जाती है।

2.11 माध्य विचलन या प्रथम घात का अपकिरण (Mean Deviation or First Moment of Dispersion)

माध्य विचलन श्रेणी के सभी पदों के विचलनों का माध्य होता है। ये विचलन बहुलक, मध्यका या समान्तर माध्य किसी भी एक माध्य से लिये जा सकते हैं। इसमें बीजगणितीय चिन्हों को छोड़कर दिया जाता है। इस प्रकार माध्य विचलन केन्द्रीय प्रवृत्ति के किसी भी माप (समान्तर माध्य, मध्यका या बहुलक आदि) से श्रेणी के विभिन्न पदों के निरपेक्ष विचलन का माध्य है। बीजगणितीय चिन्ह + और - पर स्थान न देकर सभी विचलनों को धनात्मक माना जाता है। इस प्रकार प्राप्त विचलनों को जोड़कर मर्दों की कुल संख्याओं से भाग देने पर जो संख्या प्राप्त होती है उसे माध्य विचलन कहते हैं। माध्य विचलन जितना अधिक होता है उस श्रेणी में अपकिरण या फैलाव उतना ही अधिक होता है। समान्तर माध्य से परिकलित माध्य विचलन को प्रथम घात का अपकिरण (First Moment of Dispersion) भी कहते हैं। माध्य विचलन की परिगणना हेतु निम्न पदों को अपनाते हैं:-

1. माध्य का चुनाव।
2. बीजगणितीय चिन्हों को छोड़ना।
3. विचलनों का योग एवं माध्य की गणना।

माध्य विचलन को ग्रीक भाषा δ (Delta Small) द्वारा व्यक्त किया जाता है। यदि माध्य विचलन समान्तर माध्य से ज्ञात करना हो तो δ_x , मध्यका से ज्ञात करने पर δ_m तथा बहुलक से ज्ञात करने पर δ_z संकेताक्षरों का प्रयोग करते हैं। सूत्र के रूप में माध्य विचलन व उसका गुणांक निम्न प्रकार होगा:-

आधार	माध्य विचलन	माध्य विचलन गुणांक
समान्तर माध्य से	$\delta_{\bar{X}} = \frac{\sum d_{\bar{X}} }{N}$	Coefficient $\delta_{\bar{X}} = \frac{\delta_{\bar{X}}}{\bar{X}}$
मध्यका से	$\delta_M = \frac{\sum d_M }{N}$	Coefficient $\delta_M = \frac{\delta_M}{M}$
बहुलक से	$\delta_z = \frac{\sum d_z }{N}$	Coefficient $\delta_z = \frac{\delta_z}{Z}$

यहाँ δ (डेल्टा) ग्रीक भाषा का अक्षर 'Small Delta' है

δ = माध्य विचलन

$d_{\bar{x}}$ = समान्तर माध्य से विचलन

d_M = मध्यका से विचलन

d_z = बहुलक से विचलन

N = पदों की संख्या

|| = बीजगणितीय चिन्हों को छोड़ना

उदाहरण 05:- निम्न संख्याओं का समान्तर माध्य से माध्य विचलन व माध्य विचलन से गुणांक ज्ञात कीजिए।

2, 3, 6, 8, 11

हल:- समान्तर माध्य (\bar{X}) = $\frac{2+3+6+8+11}{5} = 6$

माध्य विचलन ($\delta_{\bar{X}}$) = $\frac{|2-6|+|3-6|+|6-6|+|8-6|+|11-6|}{5}$

$$= \frac{|4|+|3|+|0|+|2|+|5|}{5} \quad \text{or} \quad \frac{14}{5} = 2.8$$

अतः समान्तर माध्य से माध्य विचलन ($\delta_{\bar{X}}$) = 2.8

$$\text{माध्य विचलन गुणांक } \delta \bar{X} = \frac{\delta \bar{X}}{X} = \frac{2.8}{6} = 0.46$$

माध्य विचलन के गुण (Merits of MD):-

- i. इसकी गणना आसान है।
- ii. यह मध्यका, समान्तर माध्य अथवा बहुलक में से किसी को भी आधार मानकर निकाला जा सकता है।
- iii. यह श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित है। अतः यह श्रेणी की आकृति पर पूर्ण प्रकाश डालता है।
- iv. यह श्रेणी के चरम मूल्यों से प्रमाप विचलन की तुलना में कम प्रभावित होता है।
- v. माध्य विचलन द्वारा ही वितरण के महत्त्व को स्पष्ट किया जा सकता है।
- vi. यह विचलन समस्त मूल्यों को उनकी सापेक्षिक महत्ता प्रदान करता है।
- vii. यह अपकिरण का एक निश्चित माप है तथा इसका मूल्य शुद्ध अंश तक निकाला जा सकता है।

माध्य विचलन के दोष (Demerits of MD):-

1. माध्य विचलन की गणना में बीजगणितीय चिन्हों की उपेक्षा करने से इसे शुद्ध नहीं माना जाता।
2. कभी-कभी यह अविश्वसनीय परिणाम देता है।
3. अलग-अलग माध्यों से अलग-अलग विचलन प्राप्त होने के कारण इसमें समानता का अभाव पाया जाता है।

व्यावहारिक रूप में माध्य विचलन की अपेक्षा प्रमाप विचलन (Standard Deviation) अधिक प्रचलित है।

2.12 प्रमाप विचलन (Standard Deviation)

प्रमाप विचलन के विचार का प्रतिपादन कार्ल पियर्सन ने 1893 ई0 में किया था। यह अपकिरण को मापने की सबसे अधिक लोकप्रिय और वैज्ञानिक रीति है। प्रमाप विचलन की गणना केवल समान्तर माध्य के प्रयोग से ही की जाती है। किसी समंक समूह का प्रमाप विचलन निकालने हेतु उस समूह के समान्तर माध्य से विभिन्न पद मूल्यों के विचलन ज्ञात किये जाते हैं। माध्य विचलन की भाँति विचलन लेते समय बीजगणितीय चिन्हों को छोड़ा नहीं जाता है। इन विचलनों के वर्ग ज्ञात कर लिए जाते हैं। प्राप्त वर्गों के योग में कुल मदों की संख्या का भाग देकर वर्गमूल निकाल लेते हैं। इस प्रकार जो अंक प्राप्त होता है उसे प्रमाप विचलन कहते हैं। वर्गमूल से पूर्व जो मूल्य आता है, उसे अपकिरण की द्वितीय घात या विचरणांक अथवा प्रसरण (Variance) कहते हैं। अतः प्रमाप विचलन समान्तर माध्य से समंक श्रेणी के विभिन्न पद मूल्यों के विचलनों के वर्गों के माध्य का वर्गमूल होता है। (Standard Deviation is the square root of the Arithmetic Mean of the squares of all deviations being measured from the Arithmetic mean of the observations).

प्रमाप विचलन का संकेताक्षर ग्रीक भाषा का छोटा अक्षर (Small Sigma) σ होता है। प्रमाप विचलन को मध्यक विभ्रम (Mean Error), मध्यक वर्ग विभ्रम (Mean Square Error) या मूल मध्यक वर्ग विचलन (Root Mean Square Deviation) आदि अनेक नामों से भी सम्बोधित किया जाता है।

प्रमाप विचलन का गुणांक (Coefficient of Standard Deviation) दो श्रेणियों की तुलना के लिए प्रमाप विचलन का सापेक्ष माप (Relative Measure of Standard Deviation) ज्ञात किया जाता है जिसे प्रमाप विचलन गुणांक (Coefficient of Standard Deviation) कहते हैं। प्रमाप विचलन में समान्तर माध्य (\bar{X}) से भाग देने से प्रमाप विचलन का गुणांक प्राप्त हो जाता है।

$$\text{प्रमाप विचलन का गुणांक (Coefficient of S.D.)} = \frac{\sigma}{\bar{X}} \text{ or } \frac{S.D.}{\text{Mean}}$$

प्रमाप विचलन की परिगणना (Calculation of Standard Deviation):-

- i. खण्डित श्रेणी में प्रमाप विचलन की गणना (Calculation of S.D. in Discrete Series)
 - a. प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}}$$

b. लघु रीति (Short-cut Method) = $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2x}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2}$

उदाहरण 06:- निम्न समंकों से प्रमाप विचलन की परिगणना कीजिए।

अंक (X)	1	2	3	4	5	6	7	Total
बारंबारता(f)	1	5	11	15	13	4	1	50

हल:- प्रत्यक्ष विधि से प्रमाप विचलन की परिगणना

अंक X	बारंबारता (f)	4 से विचलन D	विचलन का वर्ग d ²	विचलन का वर्ग व बारंबारता का गुणन fd ²	अंक व बारंबारता का गुणन fx
1	1	-3	9	9	1
2	5	-2	4	20	10
3	11	-1	1	11	33
4	15	0	0	0	60
5	13	1	1	13	65
6	4	2	4	16	24
7	1	3	9	9	7
Total	50		28	78	200

$$X = \frac{\sum fx}{N} = \frac{200}{50} = 4$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}} \text{ or } \sqrt{\frac{78}{50}} = 1.50 = 1.25 \text{ अतः SD}=1.25$$

लघु रीति (Short-cut Method) से प्रमाप विचलन की परिगणना :

X	F	dx(A=3)	fdx	fdx X dx (fdx ²)
1	1	-2	-2	4
2	5	-1	-5	5
3	11	0	0	0
4	15	+1	15	15
5	13	+2	26	52
6	4	+3	12	36
7	1	+4	4	16
Total	50		50	120

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{\sum fd^2 x}{N} - \left(\frac{\sum f dx}{N}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{120}{50} - \left(\frac{50}{50}\right)^2} \\ &= \sqrt{2.56 - (1)^2} \\ &= \sqrt{2.56 - 1} \\ &= 1.25 \end{aligned}$$

सतत श्रेणी में (Continuous Series) में प्रमाप विचलन

$$(A) \text{ प्रत्यक्ष रीति } = \sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}}$$

$$(B) \text{ लघु रीति } = \sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2 x}{N} - \left(\frac{\sum f dx}{N}\right)^2}$$

उदाहरण 07:- निम्न समकों से प्रमाप विचलन तथा उनके गुणांक की परिगणना कीजिए।

कुल अंकों में प्राप्तांक:- 0-2 2-4 4-6 6-8 8-10 Total

छात्रों की संख्या:- 2 5 15 7 1 30

Marks	No. of Students	M.V.	Deviation from $\bar{X} = s$	Square of Deviations	Product of $f \times d^2$	frequency X Value	Square of M.V.	Product of $f \text{ and } X^2$
X	f	X	d	d ²	fd ²	fX	X ²	fx ²
0-2	2	1	-4	16	32	2	1	2
2-4	5	3	-2	4	20	15	9	45
4-6	15	5	0	0	0	75	25	375
6-8	7	7	2	4	28	49	49	343
8-10	1	9	4	16	16	9	81	81
Total	30	-	-	40	96	150	165	846

$$X = \frac{\sum fx}{N} = \frac{150}{30} = 5 \text{ Marks}; \sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}} = \sqrt{\frac{96}{30}} = 1.79$$

$$\text{Coefficient of } \sigma = \frac{\sigma}{X} = \frac{1.79}{5} = \text{or } 0.36$$

लघु रीति से प्रमाप विचलन का परिकलन

X	M.V. (X)	No. of f	Dx A=7	f d x	fdx Xdx	X ²	fx ²
0-2	1	2	-6	-12	72	1	2
2-4	3	5	-4	-20	80	9	45
4-6	5	15	-2	-30	60	25	375
6-8	7	7	0	0	0	49	343
8-10	9	1	2	2	4	81	81
Total	-	30	-10	-60	216	165	846

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fdx}{N} = 7 + \frac{-60}{30} = 7 - 2 = 5 \text{ Marks}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2x}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{216}{30} - \left(\frac{-60}{30}\right)^2}$$

$$= \sqrt{7.20 - (-2)^2} = \sqrt{3.2} = 1.79 \text{ Marks}$$

विचरण गुणांक (Coefficient of Variation):- दो या दो से अधिक श्रेणियों में अपकिरण की मात्रा की तुलना करने के लिए विचरण-गुणांक का प्रयोग किया जाता है। विचरण-गुणांक ज्ञात करने हेतु प्रमाप विचलन के गुणांक को 100 से गुणा कर देते हैं तो विचरण गुणांक कहलाता है।

$$\text{विचरण गुणांक (Coefficient of Variation)} = \frac{\sigma}{X} \times 100$$

विचरण गुणांक एक सापेक्ष माप है। इसका प्रतिपादन कार्ल पियर्सन ने 1895 में किया था। अतः इसे कार्ल पियर्सन का विचरण गुणांक भी कहते हैं। कार्ल पियर्सन के अनुसार "विचरण गुणांक माध्य में होने वाला प्रतिशत विचरण है, जबकि प्रमाप विचलन को माध्य में होने वाला सम्पूर्ण विचरण माना जाता है।" इसका प्रयोग दो समूहों की अस्थिरता (Variability), सजातीयता (Homogeneity), स्थिरता (Stability) तथा संगति (Consistency) की तुलना के लिए किया जाता है। जिस श्रेणी में विचरण गुणांक कम होता है वह श्रेणी उस श्रेणी से अधिक स्थिर (संगत) होती है, जिसमें विचरण गुणांक अधिक होता है।

प्रमाप विचलन की गणितीय विशेषताएँ (Mathematical Properties of Standard Deviation):-

1. एक से अधिक श्रेणियों के आधार पर विभिन्न प्रमाप विचलनों से सम्पूर्ण श्रेणियों का सामूहिक प्रमाप विचलन निकाला जा सकता है।
2. यदि दो श्रेणियों के मर्दों की संख्या व समान्तर माध्य समान हों तो सम्पूर्ण श्रेणी का प्रमाप

$$\text{विचलन निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है:- } \sigma_{12} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}}$$

3. क्रमानुसार प्राकृतिक संख्याओं का प्रमाप विचलन ज्ञात करने हेतु निम्न सूत्र का प्रयोग

किया जा सकता है:-
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{12}(N^2 - 1)}$$

4. प्रमाप विचलन का सामान्य वक्र (Normal Curve) के क्षेत्रफल से एक विशिष्ट संबंध होता है।

$$\bar{X} \pm \sigma = 68.26\%$$

$$\bar{X} \pm 2\sigma = 95.44\%$$

$$\bar{X} \pm 3\sigma = 99.76\%$$

प्रमाप विचलन के गुण (Merits of Standard Deviation):-

1. प्रमाप विचलन श्रेणी के समस्त पदों पर आधारित होता है।
2. प्रमाप विचलन की स्पष्ट एवं निश्चित माप है।
3. प्रमाप विचलन की गणना के लिए विचलनों के वर्ग बनाये जाते हैं फलस्वरूप सभी पद धनात्मक हो जाते हैं। अतः इसका अग्रिम विवेचन भी किया जा सकता है।
4. प्रमाप विचलन पर आकस्मिक परिवर्तनों का सबसे कम प्रभाव पड़ता है।
5. विभिन्न श्रेणियों के विचरणशीलता की तुलना करने, मापों की अर्थपूर्णता की जाँच करने, वितरण की सीमाएँ निर्धारित करने आदि में प्रमाप विचलन, अपकिरण का सर्वश्रेष्ठ माप माना जाता है।
6. निर्वचन की सुविधा के कारण श्रेणी की आकृति को समझना सरल होता है।

प्रमाप विचलन के दोष (Demerits) :-

1. प्रमाप विचलन की परिगणना क्रिया अपेक्षाकृत कठिन व जटिल है।
2. प्रमाप विचलन पर चरम पदों का अधिक प्रभाव पड़ता है।

2.13 अपकिरण के विभिन्न मापों के मध्य संबंध (Relationship among different measures of Dispersion)

यदि आवृत्ति बंटन सममित अथवा कुछ असममित हो तो अपकिरण के विभिन्न मापों में संबंध निम्नवत् पाया जाता है:-

1. Range = 4 to 6 times of $\sigma(S.D.)$
2. Q.D. = $\frac{2}{3}$ of $\sigma(S.D.)$ or $\sigma(S.D.) = \frac{3}{2}$ of Q.D.
3. Q.D. = $\frac{5}{6}$ of $\delta(M.D.) = \frac{6}{5}$ of Q.D.
4. $\delta(M.D.) = \frac{4}{5}$ of $\sigma(S.D.)$ or $\sigma(S.D.) = \frac{5}{4}$ of $\delta(M.D.)$
5. $6\sigma(S.D.) = 9Q.D. = 7.5\delta(M.D.)$
6. P.E. (Probable Error) = .6745 or $\frac{2}{3}$ of $\sigma(S.D.)$

2.14 मानक त्रुटि (Standard Error)

न्यादर्श सांख्यिकी (Sample Statistics) के मानक विचलन (Standard Deviation) को उस सांख्यिकी का मानक त्रुटि (Standard Error) कहा जाता है। किसी भी न्यादर्श सांख्यिकी का प्रयोग उस जनसंख्या की विशेषता (Population parameter) को आंकलन करने में होता है। न्यादर्श माध्य (Sample Mean) वितरण के प्रमाप विचलन को 'माध्य की मानक त्रुटि (Standard Error of Mean)' की संज्ञा दी जाती है। ठीक उसी तरह न्यादर्श अनुपात वितरण (Distribution of Sample Proportions) के प्रमाप को उस 'अनुपात की मानक त्रुटि' (Standard Error of the Proportion) की संज्ञा दी जाती है। जैसा कि हम जानते हैं कि प्रमाप विचलन किसी भी एक न्यादर्श के माध्य से अंकों के फैलाव को दर्शाता है। जबकि मानक त्रुटि किसी भी समंक श्रेणी के माध्य से उस श्रेणी के अंकों के औसत विचरण या अपकिरण को दर्शाता है। किसी भी न्यादर्श वितरण के विभिन्न माध्यों के माध्य से विभिन्न मानों के औसत विचरण या अपकिरण को इंगित करता है।

दूसरे शब्दों में, प्रतिदर्श द्वारा प्राप्त किसी सांख्यिकीय मान की शुद्धता तथा सार्थकता ज्ञात करने के लिए जिस सांख्यिकीय विधि का प्रयोग किया जाता है उसे उस सांख्यिकी की 'प्रामाणिक त्रुटि' (Standard Error) या SE कहते हैं। इस सूत्र द्वारा हम इन सीमाओं का पता सरलतापूर्वक लगा सकते हैं, जिनके अन्तर्गत वास्तविक सांख्यिकीय मान (मध्यमान, माध्यिका, बहुलक, चतुर्थक विचलन, प्रमाप विचलन, सहसंबंध इत्यादि) होता है। बड़े प्रतिदर्श तथा छोटे प्रतिदर्श की प्रामाणिक त्रुटि ज्ञात करने के सूत्र अलग-अलग होते हैं।

प्रामाणिक त्रुटि को सरल शब्दों में इस प्रकार समझा जा सकता है। निदर्शन (प्रतिदर्श) बंटन (Sampling distribution) के प्रमाप विचलन को प्रामाणिक त्रुटि (Standard Error) कहते हैं।

अतः समान्तर माध्य के निदर्शन बंटन के प्रमाप विचलन (SD) को समान्तर माध्य का प्रामाणिक त्रुटि (σ_x) कहेंगे। किसी भी प्रतिदर्शन का प्रमाप त्रुटि या प्रामाणिक त्रुटि (SE) उस प्रतिदर्शन के निदर्शन बंटन का प्रमाप विचलन होता है। प्रमाप विचलन के निदर्शन बंटन (Sampling distribution) का प्रमाप विचलन, प्रमाप विचलन अनुपातों का प्रमाप त्रुटि (C_p) कहलाता है।

न्यादर्श (Sample) के संदर्भ में, मानक त्रुटि (Standard Error), न्यादर्श त्रुटि (Sampling Error) से गहरे रूप से संबंधित है। न्यादर्श सांख्यिकी (Sample Statistics) एक आकलन है। इस आकलन की शुद्धता, संगतता और सर्वश्रेष्ठता के बारे में न्यादर्श त्रुटि की मात्रा से आकलित की जाती है। न्यादर्श में प्रमाप विचलन की मात्रा जितनी अधिक होती है, मानक त्रुटि की मात्रा उतनी ही बढ़ती जाती है। मानक त्रुटि और न्यादर्श त्रुटि के मध्य प्रत्यक्ष संबंध है। अतः किसी भी सांख्यिकी मान की शुद्धता सूचकांक ज्ञात करने से पहले उस सांख्यिकी की मानक त्रुटि की जानकारी होनी चाहिए ताकि न्यादर्श सांख्यिकी (Sample Statistics) से समग्र सांख्यिकी (Population Parameter) का सही-सही आकलन किया जा सके। वास्तव में मानक त्रुटि किसी भी सांख्यिकी के सार्थकता स्तर को प्रदर्शित करता है तथा साथ ही उसके वैधता व विश्वसनीयता के बारे में भी बतलाता है। यहाँ पर कुछ महत्त्वपूर्ण सांख्यिकीयों के मानक त्रुटि का सूत्र बतलाया जा रहा है ताकि उन सांख्यिकीय मानों का प्रयोग उच्च सार्थकता स्तर पर किया जा सके।

1. समान्तर माध्य की मानक त्रुटि (Standard Error of Arithmetic Mean, SE_M)

a. जब न्यादर्श का आकार बड़ा हो $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\sigma = \text{S.D. of Population}$

$n = \text{Sample Size (न्यादर्श आकार)}$

$$\sigma_{\bar{X}} = SE_M$$

b. जब न्यादर्श का आकार 30 या उससे छोटा हो

$$S_M = \frac{S}{\sqrt{N}} \text{ जहाँ } S = \frac{\sqrt{\sum x^2}}{N-1}$$

$N = \text{न्यादर्श आकार}$

2. मध्यका की मानक त्रुटि (Standard Error of Median)

$$\sigma_{Mdn} = \frac{1.253\sigma}{\sqrt{N}} \text{ or } \sigma_{Mdn} = \frac{1.858Q}{\sqrt{N}}$$

$$\sigma = \text{S.D.}$$

Q = Quartile Deviation

3. प्रमाप विचलन की मानक त्रुटि (Standard Error of S.D.):-

समग्र का प्रमाप विचलन व न्यादर्श का प्रमाप विचलन के मध्य विचलन की मात्रा प्रमाप विचलन का मानक त्रुटि कहलाता है।

$$SE_{\sigma} = \sigma_{\sigma} = \frac{.716}{\sqrt{N}} = \frac{\sigma}{\sqrt{ZN}}$$

(SE_{σ} का मान हमेशा SE_M के मान से कम होता है)

4. चतुर्थक विचलन का मानक त्रुटि (Standard Error of Q.D.):-

$$\sigma_Q = \frac{.786\sigma}{\sqrt{N}} \text{ या } \sigma_Q = \frac{1.17Q}{\sqrt{N}}$$

5. प्रतिशत की मानक त्रुटि (Standard Error of Percentage):-

$$\sigma\% = \frac{\sqrt{PQ}}{N}$$

P = किसी व्यवहार के घटित होने का प्रतिशत

Q = (1-P)

N = No. of cases

6. सहसंबंध गुणांक की मानक त्रुटि (Standard Error of the Coefficient of Correlation):-

$$\sigma_r = \frac{(1-r^2)}{\sqrt{N}}$$

विभिन्न प्रतिदर्शनों के प्रमाप त्रुटि के सूत्र (Formulae of Standard Error of Difference Statistics):

Statistic	Standard Error
-----------	----------------

1. Sample Mean \bar{X}	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ or } \frac{\sqrt{\sigma^2}}{\sqrt{n}} = \sigma_{\bar{X}}$
2. Sample Proportion 'p'	$\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} = \sigma_P$
3. Sample Standard Deviation	$\frac{\sigma}{\sqrt{2n}} \text{ or } \frac{\sqrt{\sigma^2}}{\sqrt{2n}} = \sigma_s$
4. S ² Variance	$\sigma^2 \sqrt{\frac{2}{n}} = \sigma_v$
5. 'r' Sample Correlation Coefficient	$\frac{(1-P^2)}{\sqrt{n}} = \sigma_r$
6. Difference between two means ($\bar{X}_1 - \bar{X}_2$)	$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$
7. Difference between two means when r is given	$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} - 2r \frac{s_1 s_2}{n_1 n_2}}$
8. Difference between two standard deviations ($S_1 - S_2$)	$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{zn_1} + \frac{\sigma_2^2}{zn_2}} = \sigma_{S_1 - S_2}$
9. Difference between two proportions ($P_1 - P_2$)	$\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}} = \sigma_{P_1 - P_2}$
10. Difference between sample mean and combined mean	(i) $\sigma_{\bar{X}_1} - \bar{X}_{12} = \sqrt{\sigma^2 \frac{n_2}{n_1(n_1 + n_2)}}$ (ii) $\sigma_{\bar{X}_2} - \bar{X}_{12} = \sqrt{\sigma^2 \frac{n_1}{n_2(n_1 + n_2)}}$

<p>11. Difference between sample proportion and combined proportion</p>	$\sigma_{P_1 - P_o} = \sqrt{P_o Q_o \frac{n_2}{n_1(n_1 + n_2)}}$
<p>12. Difference between sample standard deviation and combined standard deviation</p>	<p>(i) $\sigma_{S_1 - S_{12}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{z} \frac{n_2}{n_1(n_1 + n_2)}}$</p> <p>(ii) $\sigma_{S_2 - S_{12}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{z} \frac{n_1}{n_2(n_1 + n_2)}}$</p>
<p>13. Other Measures Median</p> <p>$\sigma_m = 1.25331 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$</p> <p>Quartile Deviation =</p> <p>$\sigma_{QD} = 0.78672 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$</p> <p>Mean Deviation = $\sigma_s = 0.6028 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$</p>	<p>Variance $\sigma_s^2 = \sigma_z \frac{2}{\sqrt{n}}$</p> <p>Coefficient of Skewness = $\sigma_j = \frac{\sqrt{3}}{2n}$</p> <p>Coefficient of Correlation $\sigma_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{r}}$</p>

अभ्यास प्रश्न

-का अर्थ फैलाव, विखराव या प्रसार है।
- किसी समंक श्रेणी में सबसे अधिक मूल्य (H) और सबसे छोटे मूल्य या न्यूनतम मूल्य (L) के अन्तर को कहते हैं।
- प्रमाप विचलन के गुणांक को 100 से गुणा कर देते हैं तोकहलाता है।
- न्यादर्श सांख्यिकी (Sample Statistics) के मानक विचलन (Standard Deviation) को उस सांख्यिकी काकहा जाता है।
- दो या दो से अधिक श्रेणियों मेंकी मात्रा की तुलना करने के लिए विचरण-गुणांक का प्रयोग किया जाता है।
- माध्य विचलन श्रेणी के सभी पदों के विचलनों का..... होता है।

7. माध्य विचलन केन्द्रीय प्रवृत्ति के किसी भी माप (समान्तर माध्य, मध्यका या बहुलक आदि) से श्रेणी के विभिन्न पदों केविचलन का माध्य है।
8. चतुर्थक विचलन श्रेणी केमूल्यांकों पर आधारित अपकिरण का एक माप है।
9. चतुर्थक विचलन श्रेणी के तृतीय व प्रथम चतुर्थक के अन्तर काहोता है।
10. शतमक विस्तार P_{90} वका अन्तर होता है।
11. शतमक विस्तार माप श्रेणी के मूल्यांकों पर आधारित होता है।
12.अपकिरण कुल अपकिरण का किसी प्रमाप मूल्य से विभाजन करने से प्राप्त होता है।
13. किसी भी श्रेणी के तृतीय चतुर्थक (Q_3) तथा प्रथम चतुर्थक (Q_1) के अन्तर कोविस्तार कहते हैं।
14. मानक त्रुटि किसी भी सांख्यिकी के..... स्तर को प्रदर्शित करता है।
15. प्रमाप विचलन के विचार का प्रतिपादनने किया।
16. विचरण गुणांक एकमाप है।
17. विचरण गुणांक के विचार का प्रतिपादनने किया था।
18.समान्तर माध्य से समंक श्रेणी के विभिन्न पद मूल्यांकों के विचलनों के वर्गों के माध्य का वर्गमूल होता है।
19. समान्तर माध्य से परिकलित माध्य विचलन कोघात का अपकिरण (Moment of Dispersion) भी कहते हैं।
20. (.....) = $\frac{H - L}{H + L}$

2.15 सारांश

सांख्यिकीय विश्लेषण की शुद्धता के लिए विचरणशीलता के मापक को समझना अत्यंत आवश्यक है। प्रस्तुत इकाई में आप विचरणशीलता के मापकों, चतुर्थक, शतांक तथा प्रमुख सांख्यिकियों के प्रमाप त्रुटियों का अध्ययन किया। इस भाग में इन सभी अवधारणाओं का संक्षिप्त विवरण दिया जा रहा है।

विचरणशीलता अथवा अपकिरण का अर्थ फैलाव, विखराव या प्रसार है। अपकिरण किसी श्रेणी के पद-मूल्यांकों के विखराव या विचरण की सीमा बताता है। जिस सीमा तक व्यक्तिगत पद मूल्यांकों में भिन्नता होती है, उसके माप को अपकिरण कहते हैं।

अपकिरण को निम्न प्रकार से मापा जा सकता है:-

- i. **निरपेक्ष माप (Absolute Measures)** :- यह माप अपकिरण को बतलाता है और उसी इकाई में बताया जाता है, जिसमें मूल समंक व्यक्त किए गए हैं। निरपेक्ष माप दो श्रेणियों की तुलना करने हेतु प्रयोग नहीं किया जा सकता।
- ii. **सापेक्ष माप (Relative Measures)**:- सापेक्ष अपकिरण कुल अपकिरण का किसी प्रमाप मूल्य से विभाजन करने से प्राप्त होता है और अनुपात या प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है। दो यो दो से अधिक श्रेणियों की तुलना करने हेतु सापेक्ष माप का ही प्रयोग किया जाता है।

अपकिरण ज्ञात करने की विभिन्न रीतियाँ हैं-

1. **विस्तार (Range)**: किसी समंक श्रेणी में सबसे अधिक मूल्य (H) और सबसे छोटे मूल्य या न्यूनतम मूल्य (L) के अन्तर को विस्तार कहते हैं।
2. **अन्तर-चतुर्थक विस्तार (Inter-Quartile Range)** किसी भी श्रेणी के तृतीय चतुर्थक (Q_3) तथा प्रथम चतुर्थक (Q_1) के अन्तर को अन्तर चतुर्थक विस्तार कहते हैं। यह माप आंशिक रूप से विस्तार (Range) के समान ही है। इस माप के अन्तर्गत मध्य की 50% मर्दों के मूल्यों को ही ध्यान में रखा जाता है।
3. **शतमक विस्तार (Percentile Range)**: यह आंशिक विस्तार का ही अन्य माप है। इसका उपयोग शैक्षणिक व मनोवैज्ञानिक मापों में अधिक होता है। शतमक विस्तार P_{90} व P_{10} का अन्तर होता है। यह माप श्रेणी के 80% मूल्यों पर आधारित होता है। अतः यदि मध्य का 80% मूल्य ज्ञात हो तो भी शतमक विस्तार ज्ञात किया जा सकता है।
4. **चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)**: चतुर्थक विचलन श्रेणी के चतुर्थक मूल्यों पर आधारित अपकिरण का एक माप है। यह श्रेणी के तृतीय व प्रथम चतुर्थक के अन्तर का आधा होता है। इसलिए इसे अर्द्ध अन्तर-चतुर्थक विस्तार भी कहते हैं। यदि कोई श्रेणी नियमित अथवा सममितीय हो तो मध्यक (M), तृतीय चतुर्थक (Q_3) तथा प्रथम चतुर्थक (Q_1) के ठीक बीच होगा।
5. **माध्य विचलन (Mean Deviation)**: माध्य विचलन श्रेणी के सभी पदों के विचलनों का माध्य होता है। ये विचलन बहुलक, मध्यका या समान्तर माध्य किसी भी एक माध्य से लिये जा सकते हैं। इसमें बीजगणितीय चिन्हों को छोड़कर दिया जाता है। इस प्रकार माध्य विचलन केन्द्रीय प्रवृत्ति के किसी भी माप (समान्तर माध्य, मध्यका या बहुलक आदि) से श्रेणी के विभिन्न पदों के निरपेक्ष विचलन का माध्य है। बीजगणितीय चिन्ह + और - पर स्थान न देकर सभी विचलनों को धनात्मक माना जाता है। इस प्रकार प्राप्त विचलनों को जोड़कर मर्दों की कुल संख्याओं से भाग देने पर जो संख्या प्राप्त होती है उसे माध्य विचलन कहते हैं। माध्य विचलन जितना अधिक होता है उस श्रेणी में अपकिरण या फैलाव उतना ही अधिक होता है।

6. प्रमाप विचलन (Standard Deviation): प्रमाप विचलन की गणना केवल समान्तर माध्य के प्रयोग से ही की जाती है। किसी समंक समूह का प्रमाप विचलन निकालने हेतु उस समूह के समान्तर माध्य से विभिन्न पद मूल्यों के विचलन ज्ञात किये जाते हैं। माध्य विचलन की भौति विचलन लेते समय बीजगणितीय चिन्हों को छोड़ा नहीं जाता है। इन विचलनों के वर्ग ज्ञात कर लिए जाते हैं। प्राप्त वर्गों के योग में कुल मदों की संख्या का भाग देकर वर्गमूल निकाल लेते हैं। इस प्रकार जो अंक प्राप्त होता है उसे प्रमाप विचलन कहते हैं।

न्यादर्श सांख्यिकी (Sample Statistics) के मानक विचलन (Standard Deviation) को उस सांख्यिकी का मानक त्रुटि (Standard Error) कहा जाता है। किसी भी न्यादर्श सांख्यिकी का प्रयोग उस जनसंख्या की विशेषता (Population parameter) को आंकलन करने में होता है। न्यादर्श माध्य (Sample Mean) वितरण के प्रमाप विचलन को 'माध्य की मानक त्रुटि (Standard Error of Mean)' की संज्ञा दी जाती है। ठीक उसी तरह न्यादर्श अनुपात वितरण (Distribution of Sample Proportions) के प्रमाप को उस 'अनुपात की मानक त्रुटि' (Standard Error of the Proportion) की संज्ञा दी जाती है।

2.16 शब्दावली

1. **विचरणशीलता (Dispersion):** विचरणशीलता अथवा अपक्रिण का अर्थ फैलाव, विखराव या प्रसार है। अपक्रिण किसी श्रेणी के पद-मूल्यों के विखराव या विचरण की सीमा बताता है। जिस सीमा तक व्यक्तिगत पद मूल्यों में भिन्नता होती है, उसके माप को अपक्रिण कहते हैं।
2. **निरपेक्ष अपक्रिण (Absolute Dispersion) :** यह माप अपक्रिण को बतलाता है और उसी इकाई में बताया जाता है, जिसमें मूल समंक व्यक्त किए गए हैं। निरपेक्ष माप दो श्रेणियों की तुलना करने हेतु प्रयोग नहीं किया जा सकता।
3. **सापेक्ष माप (Relative Dispersion):-** सापेक्ष अपक्रिण कुल अपक्रिण का किसी प्रमाप मूल्य से विभाजन करने से प्राप्त होता है और अनुपात या प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है। दो यो दो से अधिक श्रेणियों की तुलना करने हेतु सापेक्ष माप का ही प्रयोग किया जाता है।
4. **विस्तार (Range):** किसी समंक श्रेणी में सबसे अधिक मूल्य (H) और सबसे छोटे मूल्य या न्यूनतम मूल्य (L) के अन्तर को विस्तार कहते हैं।

5. **अन्तर-चतुर्थक विस्तार (Inter-Quartile Range):** किसी भी श्रेणी के तृतीय चतुर्थक (Q_3) तथा प्रथम चतुर्थक (Q_1) के अन्तर को अन्तर चतुर्थक विस्तार कहते हैं।
6. **शतमक विस्तार (Percentile Range):** शतमक विस्तार P_{90} व P_{10} का अन्तर होता है। यह माप श्रेणी के 80% मूल्यों पर आधारित होता है।
7. **चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation):** चतुर्थक विचलन श्रेणी के चतुर्थक मूल्यों पर आधारित अपकिरण का एक माप है। यह श्रेणी के तृतीय व प्रथम चतुर्थक के अन्तर का आधा होता है।
8. **माध्य विचलन (Mean Deviation):** माध्य विचलन श्रेणी के सभी पदों के विचलनों का माध्य होता है। इसमें बीजगणितीय चिन्हों को छोड़कर दिया जाता है। माध्य विचलन केन्द्रीय प्रवृत्ति के किसी भी माप (समान्तर माध्य, मध्यका या बहुलक आदि) से श्रेणी के विभिन्न पदों के निरपेक्ष विचलन का माध्य है।
9. **प्रमाप विचलन (Standard Deviation):** किसी समंक समूह का प्रमाप विचलन उस समूह के समान्तर माध्य से विभिन्न पद मूल्यों का विचलन होता है। इन विचलनों के वर्ग ज्ञात कर लिए जाते हैं। प्राप्त वर्गों के योग में कुल मदों की संख्या का भाग देकर वर्गमूल निकाल लेते हैं। इस प्रकार जो अंक प्राप्त होता है उसे प्रमाप विचलन कहते हैं।
10. **मानक त्रुटि (Standard Error):** न्यादर्श सांख्यिकी (Sample Statistics) के मानक विचलन (Standard Deviation) को उस सांख्यिकी का मानक त्रुटि (Standard Error) कहा जाता है।
11. **विचरण गुणांक (Coefficient of Variation):** विचरण-गुणांक ज्ञात करने हेतु प्रमाप विचलन के गुणांक को 100 से गुणा कर देते हैं तो विचरण गुणांक कहलाता है। दो या दो से अधिक श्रेणियों में अपकिरण की मात्रा की तुलना करने के लिए विचरण-गुणांक का प्रयोग किया जाता है।

2.17 अपनी अधिगम प्रगति जानिए से संबंधित प्रश्नों के उत्तर

1. अपकिरण
2. विस्तार
3. विचरण गुणांक
4. अपकिरण
5. मानक त्रुटि (Standard Error)
6. माध्य
7. निरपेक्ष

8. चतुर्थक
9. आधा
10. P_{10}
11. 80%
12. सापेक्ष
13. अन्तर चतुर्थक
14. सार्थकता
15. कार्ल पियर्सन
16. सापेक्ष
17. कार्ल पियर्सन
18. प्रमाप विचलन
19. प्रथम
20. विस्तार गुणांक

2.18 संदर्भ ग्रन्थ सूची/ पाठ्य सामग्री

1. Garret, H.E. (1972). Statistics in Psychology and Education, New York, Vakils, Feffers and Simans Pvt. Ltd.
2. Best, John W. & Kahn (2008). Research in Education, New Delhi, PHI.
3. Koul, Lokesh (2002). Methodology of Educational Research New Delhi, Vikas Publishing Pvt. Ltd.
4. Karlinger, Fred N. (2002). Foundations of Behavioural Research, New Delhi, Surjeet Publications.
5. गुप्ता, एस०पी० (2008) : मापन एवं मूल्यांकन, इलाहाबाद, शारदा पब्लिकेशन
6. सिंह, ए०के० (2007) : मनोविज्ञान, समाजशास्त्र तथा शिक्षा में शोध विधियाँ, नई दिल्ली, मोतीलाल बनारसी दास
7. शर्मा, आर०ए० (2001) : शिक्षा अनुसंधान के मूल तत्व एवं शोध प्रक्रिया, मेरठ, आर०लाल० पब्लिकेशन्स

2.19 निबंधात्मक प्रश्न

1. विचरणशीलता अथवा अपकिरण का अर्थ स्पष्ट कीजिए तथा विचरणशीलता के महत्त्व का वर्णन कीजिए।
2. विचरणशीलता के विभिन्न मापकों की तुलना कीजिए।
3. प्रमाप त्रुटि का अर्थ स्पष्ट कीजिए तथा इसके महत्त्व का वर्णन कीजिए।
4. निम्न समंकों के आधार पर चतुर्थक विचलन एवं उसका गुणांक ज्ञात कीजिए। From the following data find Quartile Deviation and its Coefficient. (उत्तर $Q_1=4.13$, $Q_3=7.11$, $Q.D.=1.49$, गुणांक=0.27)

अंक (X)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
बारंबारता (f)	2	9	11	14	20	24	20	16	5	2

5. निम्न समंकों से माध्य विचलन की परिगणना कीजिए। (उत्तर 12.19)

अंक (X)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
बारंबारता (f)	10	12	25	35	45	50

6. निम्न समंकों से प्रमाप विचलन तथा उसका गुणक की परिगणना कीजिए। (उत्तर: प्रमाप विचलन= 13.91 गुणक=0.57)

अंक (X)	0	10	20	30	40
बारंबारता (f)	80	60	50	35	10

इकाई 3: सामान्य प्रायिकता वक्र (Normal Probability Curve-NPC)

- 3.1 प्रस्तावना
- 3.2 उद्देश्य
- 3.3 आवृत्ति वितरण के प्रकार
- 3.4 विषमता
- 3.5 विषमता गुणांक का परिकलन
- 3.6 पृथुशीर्षत्व या कुकुदता
- 3.7 पृथुशीर्षत्व का माप
- 3.8 प्रसामान्य/सामान्य बंटन या वितरण
- 3.9 प्रसामान्य वक्र
- 3.10 प्रसामान्य वक्र की विशेषताएँ
- 3.11 मानक प्रसामान्य वक्र
- 3.12 मानक प्रसामान्य वक्र की विशेषताएँ
- 3.13 प्रसामान्य वक्र की उपयोगिताएँ या अनुप्रयोग
- 3.14 प्रसामान्य वक्र में प्रायिकता निर्धारित करना
- 3.15 सामान्य संभावना वक्र के उपयोग के उदाहरण
- 3.16 सारांश
- 3.17 शब्दावली
- 3.18 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर
- 3.19 संदर्भ ग्रन्थ सूची/ पाठ्य सामग्री
- 3.20 निबंधात्मक प्रश्न

3.1 प्रस्तावना

आंकड़ों की विश्लेषण की क्रिया में एक शोधार्थी या छात्र को आंकड़े या समंक (Data) या अंकों (Scores) की प्रकृति को जानना चाहिए। केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप (Measures of Central Tendency) हमें समंक श्रेणी के प्रतिनिधि मूल्यों का अनुमान प्रस्तुत करते हैं तथा विचरणशीलता के माप (Measures of Variability) केन्द्रीय मूल्य के विभिन्न पद मूल्यों के बिखराव, फैलाव अथवा प्रसार को इंगित करते हैं। यद्यपि ये दोनों ही माप श्रेणी के विश्लेषण हेतु अत्यंत आवश्यक सूचनाएँ प्रस्तुत करते हैं, किन्तु इनमें यह ज्ञात नहीं हो पाता कि समंक श्रेणी का स्वरूप कैसा है अर्थात् केन्द्रीय प्रवृत्ति से मूल्यों का बिखराव या प्रसार सममितीय है अथवा सममितीय नहीं है। अतः श्रेणी या आंकड़ों के वास्तविक स्वरूप को जानने के लिए आंकड़ों के वितरण की प्रवृत्ति को समझना अत्यावश्यक है। इसके लिए आपको सामान्य वितरण वक्र इसकी विशेषताएँ और उपयोगिताएँ, समंक वितरण वक्र के प्रकार को विषमता व पृथुशीर्षत्व जैसे मानों के माध्यम से जानना अनिवार्य है ताकि आप अंकों के वितरण की प्रकृति को समझ सकें और इसका प्रयोग शोध निष्कर्ष निकालने में कर सकें। प्रस्तुत इकाई में आप सामान्य वितरण वक्र की विशेषताएँ और उपयोगिताएँ, विषमता व पृथुशीर्षत्व के मान के परिकलन के बारे में अध्ययन करेंगे।

3.2 उद्देश्य

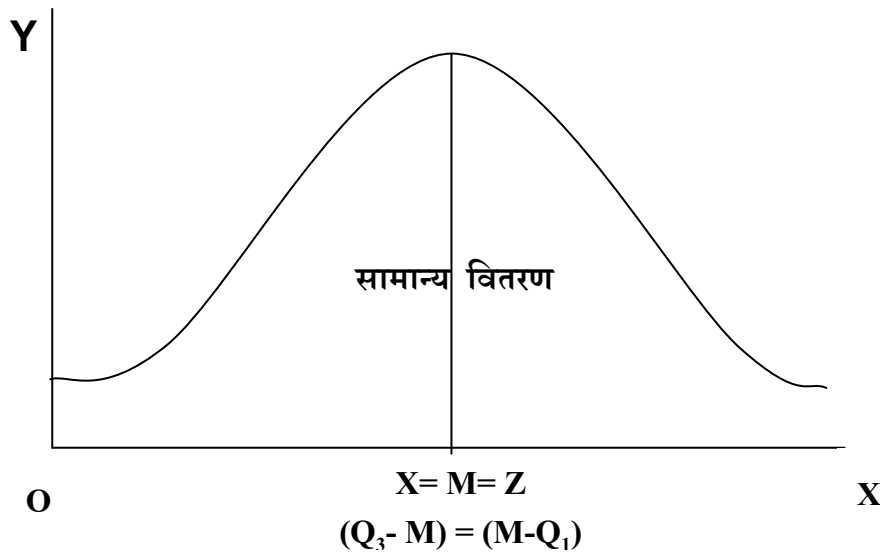
इस इकाई के अध्ययनोपरांत आप-

1. सामान्य वितरण के अर्थ को स्पष्ट कर पाएँगे।
2. सामान्य वितरण वक्र की विशेषताओं की व्याख्या कर सकेंगे।
3. सामान्य वितरण वक्र की प्रकृति को बता पायेंगे।
4. सामान्य वितरण वक्र की उपयोगिताओं की व्याख्या कर सकेंगे।
5. सामान्य वितरण वक्र पर आधारित समस्याओं को हल कर सकेंगे।
6. विषमता गुणांक के मान का परिकलन कर सकेंगे।
7. पृथुशीर्षत्व मापक का परिकलन कर सकेंगे।

3.3 आवृत्ति वितरण के प्रकार (Types of frequency distribution)

1. **सममित अथवा सामान्य वितरण (Symmetrical or Normal Distribution):-**
इस प्रकार के वितरण में आवृत्तियाँ एक निश्चित क्रम से बढ़ती हैं फिर एक निश्चित बिन्दु पर अधिकतम होने के पश्चात् उसी क्रम से घटती है। यदि आवृत्ति वितरण का वक्र तैयार

किया जाय तो वह सदैव घण्टी के आकार (Bell Shaped) का होता है, जो इसकी सामान्य स्थिति को प्रदर्शित करता है। ऐसे वितरण में समान्तर माध्य, मध्यका व बहुलक के मूल्य समान होते हैं तथा मध्यका से दोनों चतुर्थकों (Quartiles) के मूल्यों में अन्तर भी समान होता है। इस प्रकार के वितरण में विषमता नहीं होती है। ऐसे वितरण को सामान्य वितरण (Normal Distribution), सामान्य वक्र (Normal Curve) या सामान्य विभ्रम वक्र (Normal Curve of Error) के नाम से भी जाना जाता है।



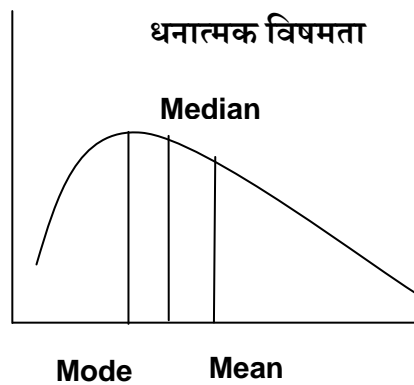
रेखाचित्र 01

रेखाचित्र 01 एक आदर्श आवृत्ति वक्र को प्रस्तुत करता है, जिसमें बिल्कुल विषमता नहीं है। इसकी आवृत्ति घण्टी के आकार की होने के कारण इसे घण्टी के आकार (Bell Shaped) वाली वक्र कहते हैं। इस दशा में समान्तर माध्य, मध्यका तथा बहुलक का मूल्य समान रहता है। यह सामान्य वक्र है।

1. **असममित वितरण अथवा विषम वितरण (Asymmetrical Distribution):-**
असममित वितरण में आवृत्तियों के बढ़ने व घटने के क्रम में अन्तर पाया जाता है। आवृत्तियाँ जिस क्रम में बढ़ती है अधिकतम बिन्दु पर पहुँचने के पश्चात उसी क्रम में नहीं घटती। ऐसे वितरण का वक्र घण्टी के आकार वाला व दायें या बायें झुकाव लिए हुए होता है। ऐसे वितरण में समान्तर माध्य, मध्यका एवं बहुलक के मूल्य असमान होते हैं तथा चतुर्थकों के अन्तर भी असमान होते हैं तथा मध्यका में दोनों चतुर्थकों के अन्तर भी

असमान होते हैं। इस प्रकार के वितरण में विषमता की उपस्थिति होती है। असममित वितरण दो प्रकार की हो सकती है:-

- i. **धनात्मक विषमता (Positive Skewness) :-** यदि वक्र का झुकाव दाहिनी ओर है तो उस वक्र में धनात्मक विषमता **Median** मक विषमता रखने वाले वितरण में समान्तर माध्य का मूल्य (\bar{X}), मध्यका (M_d) तथा बहुलक (Z) से अधिक होता है। यदि धनात्मक विषमता वक्र को बिन्दुरेखीय चित्र पर प्रदर्शित किया जाय तो वक्र का लम्बा भाग अधिक चर वाले स्थानों को जाता है। धनात्मक विषमता वक्र में सर्वप्रथम, फिर मध्यका और अन्त में समान्तर माध्य आता है अर्थात् $(\bar{X}) > M_d > Z$.

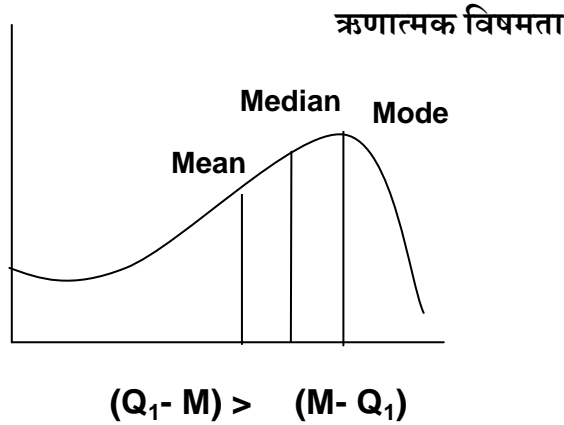


$$\text{Mean} > \text{Median} > \text{Mode}$$

रेखाचित्र 02

वास्तव में असममित बंटन वाला वक्र, केन्द्र से दाहिनी ओर को अधिक फैला हो सकता है या बायीं ओर को। द्वितीय आकृति से दाहिनी ओर झुकाव वाली थोड़ी विषम वक्र दिखाई गई है। इस दशा में समान्तर माध्य का मूल्य मध्यका से अधिक होता है तथा मध्यका का बहुलक से अधिका। इस प्रकार बहुलक का मूल्य सबसे कम होता है। ऐसा आवृत्ति वक्र धनात्मक विषमता को प्रदर्शित करता है।

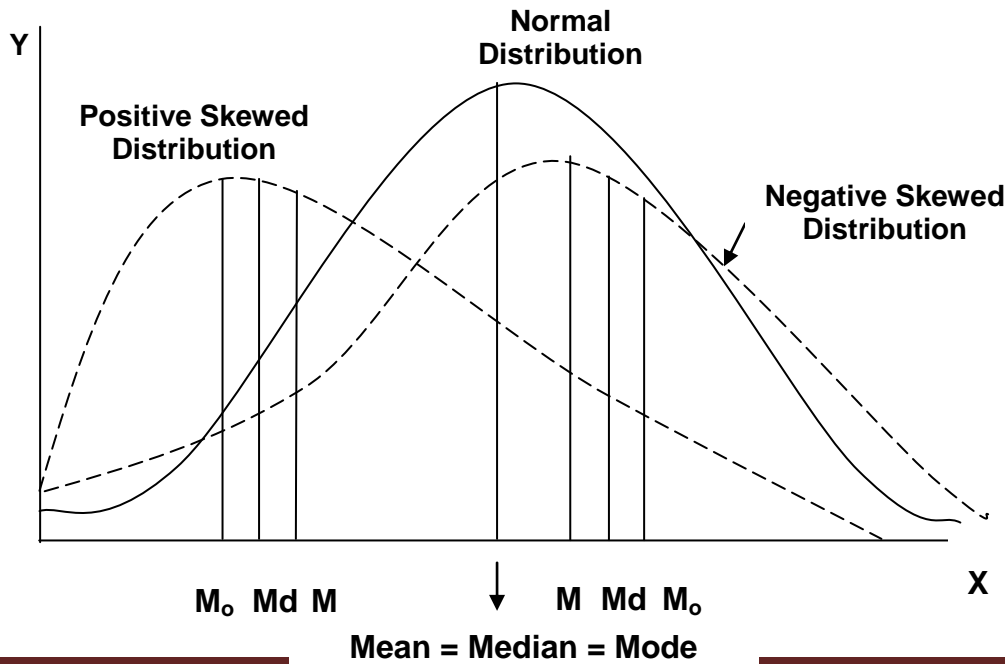
- ii. **ऋणात्मक विषमता (Negative Skewness) :-** यदि वक्र का झुकाव दाहिनी ओर न होकर बायीं ओर अधिक हो तो विषमता ऋणात्मक होगी। यदि समान्तर माध्य का मूल्य, मध्यका और बहुलक से कम होता है तो विषमता ऋणात्मक होगी। इसे बिन्दु रेखीय चित्र पर प्रदर्शित किया जाय तो वक्र का लम्बा भाग कम मूल्य वाले स्थानों को जाता है। ऋणात्मक विषमता में सर्वप्रथम समान्तर माध्य, फिर मध्यका और अन्त में बहुलक आता है, अर्थात् $X < M < Z$



रेखाचित्र 03

रेखाचित्र 03 ऋणात्मक विषमता (Negative Skewness) को दर्शाता है। इस दशा में बहुलक का मूल्य सबसे अधिक होता है। ऐसा वक्र बायीं ओर विषमता को बताता है।

आवृत्ति वितरण के विभिन्न प्रकारों को अग्रांकित चित्र द्वारा सरलता से समझा जा सकता है: सामान्य वितरण वक्र, धनात्मक विषमता वक्र, व ऋणात्मक विषमता वक्र के सापेक्षिक स्थिति को इन रेखाचित्रों के माध्यम से समझा जा सकता है।



इस प्रकार आपने देखा कि विषमता धनात्मक अथवा ऋणात्मक दोनों ही प्रकार की हो सकती है। दूसरी बात यह है कि विषमता कम या अधिक हो सकती है। यदि वक्र कम फैला हुआ हो तो विषमता साधारणतया कम और वक्र के अधिक फैला होने की दशा में विषमता अधिक होती है। आवृत्ति वितरण के विभिन्न स्वरूपों में केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों की स्थिति को अग्रलिखित आंकड़ों के माध्यम से आप समझ सकते हैं-

आवृत्ति वितरण के विभिन्न स्वरूप:

आकार (Size)	अ	ब	स
	आवृत्ति (Frequency)	आवृत्ति (f)	आवृत्ति (f)
5	10	10	10
10	30	90	20
15	50	50	30
20	70	40	40
25	50	30	50
30	30	20	90
35	10	10	10
विषमता	विषमता का अभाव (Symmetrical) सममित	असममित (Asymmetrical) धनात्मक विषमता (Positively Skewed)	असममित (Asymmetrical) ऋणात्मक विषमता (Negatively Skewed)
माध्यों की स्थिति Position of Average	Mean = Median = Mode	$M > Md > Mo$	$M < Md < Mo$
चतुर्थक Quartiles	$Q_3 - M_d = M_d - Q_1$	$(Q_3 - M_d) > (M_d - Q_1)$	$Q_3 - Md < Md - Q_1$
वक्र (Curve)	प्रसामान्य (Normal)	धनात्मक विषमता (Positively Skewed or Skewed to the	ऋणात्मक विषमता (Negatively Skewed or Skewed to the Right)

3.4 विषमता (Skewness)

विषमता का माप एक ऐसा संख्यात्मक माप है, जो किसी श्रेणी की असममितता (Asymmetry) को प्रकट करता है। एक वितरण को विषम कहा जाता है, जबकि उसमें सममितता (Symmetry) का अभाव हो, अर्थात् मापों के विस्तार के एक ओर या दूसरी ओर ही मूल्य केन्द्रित हो जाते हैं। (A distribution is said to be skewed if it is lacking in symmetry that is in the measure tend to pile up at one end or the other of the range of measures) सिम्पसन और काफका के अनुसार:- 'विषमता अथवा असममितता एक आवृत्ति वितरण की विशेषता है जो एक ओर अधिकतम आवृत्ति के साथ अन्य ओर की अपेक्षा अधिक झुक जाता है।' (Skewness or asymmetry is the attribute of frequency distribution that extends further on one side of class with the highest frequency than on the other) मौरिस हमबर्ग के अनुसार:- "विषमता एक आवृत्ति वितरण से असममितता अथवा सममितता के अभाव को आकार के रूप में बतलाता है। यह लक्षण केन्द्रीय प्रवृत्ति के कुल मापों के प्रतिनिधि का निर्णय हेतु विशेष महत्त्व का है। (Skewness refers to the asymmetry or lack of symmetry in the shape of a frequency distribution. This characteristic is of particular importance in connection with judging the typicality of certain measures of central tendency.

संक्षेप में, किसी वितरण की सममितता से दूर हटने की प्रवृत्ति ही विषमता कहलाती है।

विषमता धनात्मक या ऋणात्मक हो सकती है। धनात्मक एवं ऋणात्मक मात्रा ज्ञात करने हेतु विषमता के मापों का उपयोग किया जाता है। विषमता के चार माप होते हैं तथा इनमें से प्रत्येक माप को दो रूपों में प्रदर्शित किया जा सकता है, जिन्हें निरपेक्ष माप (Absolute Measure) तथा सापेक्ष माप (Relative Measure) कहते हैं। विषमता के निरपेक्ष माप द्वारा विषमता की कुल मात्रा (Degree) तथा धनात्मक (+) व ऋणात्मक (-) प्रकृति मात्र ही ज्ञात हो पाती है। यह माप तुलनात्मक अध्ययन हेतु उपयुक्त नहीं होता। अतः दो या दो से अधिक वितरणों के तुलनात्मक अध्ययन हेतु विषमता का सापेक्ष माप महत्त्वपूर्ण होता है। ये सापेक्ष माप विषमता गुणांक (Coefficient of Skewness) कहलाता है, जिसे संकेताक्षर (J) द्वारा व्यक्त किया जाता है। जिस श्रेणी का विषमता गुणांक कम होता है तो वितरण में विषमता न्यून अथवा विषमता का अभाव या सममित वितरण होता है।

3.5 विषमता गुणांक का परिकलन (Computation of the measures of Skewness)

विषमता गुणांक का परिकलन निम्नलिखित तीन प्रकार से किया सकता है , जो इस प्रकार है:-

- i. कार्ल पियर्सन का माप (Karl Pearson's Measure)
- ii. बाउले का माप (Bowley's Measure)
- iii. केली का माप (Kelly's Measure)

1. **कार्ल पियर्सन का माप (Karl Pearson's Measure):-** यह माप समंक श्रेणी के माध्यों की स्थिति पर निर्भर करता है। एक विषम आवृत्ति वितरण में समान्तर माध्य , मध्यका तथा बहुलक के मूल्य समान नहीं होते हैं। इन माध्यों के मध्य अन्तर जितना अधिक होगा वितरण उतना ही अधिक विषम होगा। यह धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है। निरपेक्ष माप को प्रमाप विचलन (S.D.) से विभाजित करने पर सापेक्ष माप ज्ञात किया जा सकता है। इस माप के निम्न सूत्र है:-

$$i. \text{Skewness } (S_k) = \text{Mean } (\bar{X}) - \text{Mode } (z) = \text{निरपेक्ष माप}$$

$$ii. \text{Coefficient of Skewness } (J) = \frac{\text{Mean}(x) - \text{Mode}(z)}{S.D.(\sigma)} = \text{सापेक्ष माप}$$

यदि किसी श्रेणी में बहुलक मूल्य का निर्धारण संभव न हो तो वैकल्पिक सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है, जो कार्ल पियर्सन का द्वितीय माप (Second Measure of Skewness) कहलाता है। इसके सूत्र निम्नवत् है:-

$$i. \text{Skewness } (S_k) = 3 (\text{Mean} - \text{Median}) = \text{निरपेक्ष माप}$$

$$ii. \text{Coefficient of Skewness } (i) = \frac{3 (\text{Mean} - \text{Median})}{S.D.(\sigma)} = \text{सापेक्ष माप}$$

कार्ल पियर्सन का वैकल्पिक सूत्र (Alternative Formula) माध्यों के मध्य आनुपातिक संबंध, $\text{Mode} = 3 M_d - 2 \text{Mean}$ पर आधारित है।

उदाहरण 1:- दो वितरणों से संबंधित आंकड़ों के आधार पर माप बताइए कि प्रस्तुत वितरण में किस प्रकार की विषमता है और कौन से वितरण में अधिक विषमता है।

	वितरण - I	वितरण- II
Mean (माध्य)	10	9
Median (माध्यिका)	9	10
Standard Deviation (प्रमाण विचलन)	2	2

हल:- इस प्रश्न में बहुलक का मूल्य नहीं दिया गया है, अतः कार्ल पियर्सन का द्वितीय सूत्र प्रयुक्त किया जाएगा।

$$\text{वितरण - I} \quad j = \frac{3 (\text{Mean} - \text{Median})}{S.D.} = \frac{3 (10 - 9)}{2} = +1.5$$

$$\text{वितरण - II} \quad j = \frac{3 (\text{Mean} - \text{Median})}{S.D.} = \frac{3 (9 - 10)}{2} = -1.5$$

स्पष्ट है कि वितरण- I , धनात्मक रूप से विषम व वितरण- II ऋणात्मक रूप से विषम है। दोनों वितरणों में विषमता की मात्रा समान है।

बाउले का माप (Bowleys' Measures):- डा0 ए0एल0 बाउले द्वारा प्रतिपादित माप मध्यिका और चतुर्थकों पर आधारित है। एक सममित वितरण में मध्यिका से प्रथम और तृतीय चतुर्थकों के अन्तर समान दूरी पर होते हैं तथा इनके असमान होने पर वितरण में विषमता पायी जाती है। यह अन्तर जितना अधिक होता है, विषमता उतनी अधिक होती है। चतुर्थकों तथा मध्यिका के आधार पर ज्ञात किए जाने वाले विषमता के माप को विषमता का द्वितीय माप (Second Measures of Skewness) अथवा चतुर्थक विषमता का माप (Quartile Measure of Skewness) भी कहते हैं। विषमता के इस माप का प्रयोग ऐसी स्थिति में किया जाता है, जब एक वितरण के बहुलक निश्चित न हों। इस माप का प्रयोग खुले शीर्षक वाले वर्ग होने की स्थिति में भी किया जा सकता है। इसका सूत्र निम्नवत् है:-

बाउले का विषमता माप (विषमता का चतुर्थक माप) :-

$$Sk = (Q_3 - Md) - (Md - Q_1) \text{ or } Q_3 + Q_1 - 2 Md$$

बाउले का विषमता गुणांक (विषमता का चतुर्थक गुणांक)

$$J_Q = \frac{(Q_3 - Md) - (Md - Q_1)}{(Q_3 - Md) + (Md - Q_1)} \text{ or } \frac{Q_3 + Q_1 - 2 Md}{Q_3 - Q_1}$$

2. **केली का माप (Kelly's Measure):-** केली का माप उपर्युक्त दोनों मापों का मध्य मार्ग है। कार्ल पियर्सन का माप एक वितरण की समस्त मर्दों पर आधारित है, जबकि डा0 बाउले का माप मध्य की 50 प्रतिशत मर्दों पर ही आधारित है। केली के माप के अन्तर्गत मध्य की 80 प्रतिशत मर्दों पर ध्यान दिया जाता है। इस माप के अन्तर्गत वितरण के 90 वॉ शतमक (Percentile) और 10वॉ शतमक (Percentile) (अथवा दशमक 9 व दशमक 1) के मध्य की मर्दों पर ध्यान दिया जाता है:-

इस माप पर आधारित सूत्र निम्नवत् है:-

$$\text{Skewness } (S_k) = P_{90} - P_{10} - 2P_{50} \quad \text{or} \quad D_9 - D_1 - 2D_5$$

$$\text{Coefficient of Skewness } (J_p) = \frac{P_{90} + P_{10} - 2P_{50}}{P_{90} - P_{10}} \quad \text{or} \quad \frac{D_9 + D_1 - 2D_5}{D_9 - D_1}$$

केली द्वारा प्रस्तावित विषमता माप बहुत सरल है, किन्तु यह वितरण की मात्र 80 प्रतिशत भाग की विषमता का ही मापन करती है। अतः इसका व्यवहार में प्रयोग बहुत कम किया जाता है।

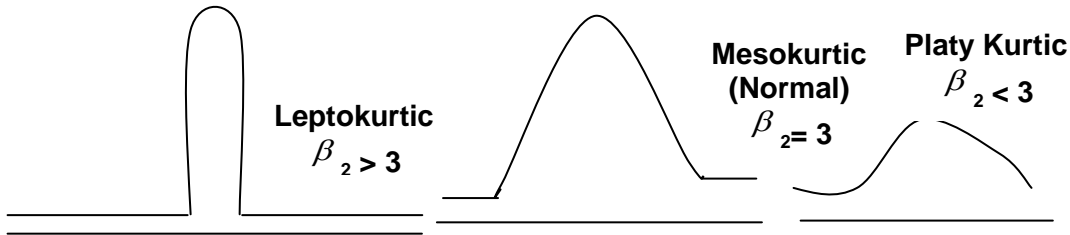
3.6 पृथुशीर्षत्व या कुकुदता (Kurtosis):-

पृथुशीर्षत्व या कुकुदता एक सांख्यिकीय माप है, जो वक्र के शीर्ष की प्रकृति (Peak of a curve) पर प्रकाश डालती है। ग्रीक भाषा में इस शब्द का अर्थ फुलावट (Bulginess) होता है। सांख्यिकी में पृथुशीर्षत्व से तात्पर्य एक आवृत्ति वक्र के बहुलक के क्षेत्र में चपटेपन या नुकीलापन की मात्रा से है। सिम्पसन एवं कापका के अनुसार- "एक वितरण में पृथुशीर्षत्व की मात्रा का माप सामान्य वक्र के बनावट के संबंध में की जाती है (The degree of kurtosis of a distribution is measured relative to the peakedness of a normal curve)"

क्राक्स्टन एवं काउडेन के शब्दों में :- "पृथुशीर्षत्व का माप उस मात्रा को व्यक्त करता है, जिसमें एक आवृत्ति वितरण का वक्र नुकीला अथवा चपटे शीर्ष वाला होता है। (A measure of Kurtosis indicates the degree to which a curve of the frequency distribution is peaked or flat-topped).

सी0एच0 मेयर्स के शब्दों में – "पृथुशीर्षत्व से आशय वितरण के मध्य के नुकीलेपन के परिणाम से है (Kurtosis is the property of a distribution which expresses relative peaked ness)"

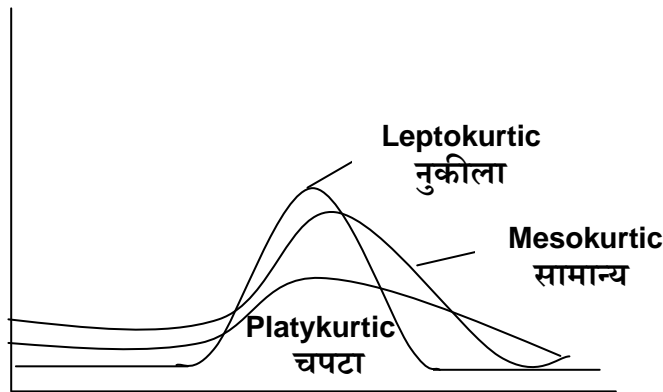
वक्र का शीर्ष नुकीला है अथवा चपटा इसका मूल्यांकन मध्य शीर्ष वाले वक्र जिसे सामान्य वक्र या Mesokurtic कहते हैं, के आधार पर किया जाता है। निम्न रेखाचित्रों में इन तीनों प्रकार के वक्रों को प्रदर्शित किया गया है:-



कार्ल पियर्सन ने 1905 में निम्न तीन शब्दों का प्रयोग किया था:-

- LEPTOKURTIC (लेप्टोकर्टिक): नुकीले शीर्ष वाला वक्र (Peaked Curve)
- PLATYKURTIC (प्लेटीकर्टिक) : चपटे शीर्ष वाला वक्र (Flat-topped Curve)
- MESOKURTIC (मेसोकर्टिक) : सामान्य वक्र (Normal Curve)

वक्र का शीर्ष नुकीला है अथवा चपटा, इसका मूल्यांकन मध्य शीर्ष वाले वक्र जिसे सामान्य वक्र या मेसोकर्टिक (Mesokurtic) कहते हैं, के आधार पर किया जाता है। निम्न रेखाचित्रों में इन तीनों प्रकार के वक्रों को प्रदर्शित किया गया है। उपरोक्त तीनों रेखाचित्रों के स्थान पर एक ही रेखाचित्र से पृथुशीर्षत्व के विभिन्न प्रकारों को समझा जा सकता है।



3.7 पृथुशीर्षत्व का माप (Measurement of Kurtosis)

पृथुशीर्षत्व का माप चतुर्थ एवं द्वितीय केन्द्रीय परिघातों (Moments) के आधार पर परिघात अनुपात (Moments Ratio) द्वारा ज्ञात किया जाता है। कार्ल पियर्सन के अनुसार, पृथुशीर्षत्व को परिकलन का सूत्र निम्न प्रकार से है:-

$$\beta_2 \text{ (Beta two)} = \frac{\mu_4 \text{ (fourth moment)}}{\mu_2 \text{ (second moment)}} \quad X = M = Z$$

जहाँ
$$\mu_4 = \frac{\sum d^4}{N} = \frac{\sum (X - \bar{X})^4}{N}$$

$$\mu_2 = \frac{\sum d^2}{N} = \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{N}$$

सामान्य वितरण में β_2 का मान 3 के बराबर होता है। यदि β_2 का मान 3 से अधिक है तो वक्र का शीर्ष नुकीला (Leptokurtic) होगा, जबकि इसका मान 3 से कम है तो शीर्ष चपटा (Platykurtic) होगा।

संकेतानुसार – यदि $\beta_2 = 3$ वक्र सामान्य है अर्थात् Mesokurtic

यदि $\beta_2 > 3$ वक्र नुकीला है अर्थात् Leptokurtic

यदि $\beta_2 < 3$ वक्र चपटा है अर्थात् Platykurtic

पृथुशीर्षत्व के माप हेतु γ_2 (गामा) का भी प्रयोग किया जा सकता है। इसके अनुसार यदि,

γ_2 or $\beta - 3 =$ वक्र सामान्य है Mesokurtic

γ_2 धनात्मक है, तो वक्र नुकीला होगा अर्थात् Leptokurtic

γ_2 ऋणात्मक है, वक्र चपटा होगा अर्थात् Platykurtic

पृथुशीर्षत्व के माप का वैकल्पिक सूत्र:- पृथुशीर्षत्व के माप का परिकलन निम्न सूत्र की मदद से भी ज्ञात की जा सकती है:-

$$k_u = \frac{Q}{P_{90} - P_{10}}$$

यदि $k = 0.263$ तो यह वक्र सामान्य (Mesokurtic) होगा।

यदि $k > 0.263$ तो यह वक्र चपटा (Platykurtic) होगा।

यदि $k < 0.263$ तो यह वक्र नुकीला (Leptokurtic) होगा।

उदाहरण:- किसी वितरण के प्रथम चार केन्द्रीय परिघातों (Moments) का मान 0, 2.5, 0.7 तथा 18.75 है। विषमता तथा पृथुशीर्षत्व का परीक्षण कीजिए।

हल:- विषमता (Skewness) के लिए:-

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{(0.7)^2}{(2.5)^3} \quad \text{or} \quad \frac{0.49}{15.625} = +0.03$$

$$\text{पृथुशीर्षत्व (Kurtosis) के लिए:- } \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{18.75}{(2.5)^2} \quad \text{or} \quad 3$$

चूंकि $\beta_1 = +0.03$ है, वितरण पूर्ण रूप से सममित (Symmetrical) नहीं है। इसी प्रकार $\beta_2 = 3$ है, अतः वितरण सामान्य या Mesokurtic है।

3.8 प्रसामान्य/सामान्य बंटन या वितरण (Normal Distribution)

प्रसामान्य/सामान्य बंटन या वितरण (Normal Distribution) एक सतत् प्रायिकता बंटन (Continuous Random Distribution) है। इसका प्रायिकता घनत्व फलन (Probability Density Function) घंटीनुमा आकार (Bell Shaped) का वक्र (Curve) होता है तथा यह वक्र प्रसामान्य बंटन के दो प्राचल (Parameters) माध्य (Mean) (μ) तथा प्रमाप विचलन (Standard Deviation) (σ) पर आधारित होता है। इस बंटन को विकसित करने में 18वीं शताब्दी के गणितज्ञ कार्ल गॉस का बहुत बड़ा योगदान रहा है। अतः इस बंटन को **गॉस का बंटन (Gaussian Distribution)** भी कहते हैं। इसे अन्य नामों से जैसे **त्रुटि वक्र (Curve of error)**, **डीमोवर्स वक्र (Demover's Curve)** और **घंटाकार वक्र (Bell Shaped Curve)** के नाम से भी जाना जाता है।

प्रसामान्य प्रायिकता घनत्व फलन (Normal Probability Density function), जिसके आधार पर घंटीनुमा आकार का वक्र बनता है, के समीकरण को निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है :-

$$P(X) = \frac{1}{\sigma \sqrt{\pi}} e^{-\frac{(X - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{जहां } -\infty \leq x \leq \infty$$

यहाँ μ = समान्तर माध्य

σ = प्रमाप विचलन

π = 3.14159

e = 2.71828

3.9 प्रसामान्य वक्र (Normal Curve)

प्रसामान्य वक्र से तात्पर्य वैसे वक्र से होता है, जिसके द्वारा प्रसामान्य वितरण (normal distribution) का प्रतिनिधित्व होता है। प्रसामान्य वितरण का अर्थ वैसे वितरण से होता है जिससे बहुत सारे मद/केसेज/इकाई (cases) मापनी के बीच में आते हैं तथा बहुत कम मद/केसेज/इकाई मापनी के ऊपरी छोर तथा बहुत कम केसेज मापनी के निचली छोर पर आते हैं। मनोविज्ञान तथा शिक्षा में अध्ययन किए जाने वाले अधिकतर चर (Variable) पर आये प्राप्तांक चूँकि प्रसामान्य रूप से वितरित होते हैं, अतः इस वक्र की उपयोगिता काफी अधिक है। बुद्धि, शाब्दिक बोध क्षमता (Verbal Comprehension ability) आदि कुछ ऐसे चर हैं, जो प्रसामान्य रूप से वितरित होते हैं। अतः इनसे बनने वाला वक्र प्रसामान्य वक्र होगा। प्रसामान्य वक्र को गणितीय समीकरण के रूप में निम्न प्रकार से व्यक्त किया जाता है।

$$y = \frac{N}{\sigma \sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \text{(Equation of the normal Probability curve)}$$

जिसमें x = अंक (माध्य से विचलन के रूप में) x अक्ष पर रखा जाता है।

y = अक्ष के ऊपर वक्र की ऊँचाई जो x मान की बारंबारता को प्रदर्शित करता है।

N = केसेज की संख्या

σ = प्रमाप विचलन (वितरण का)

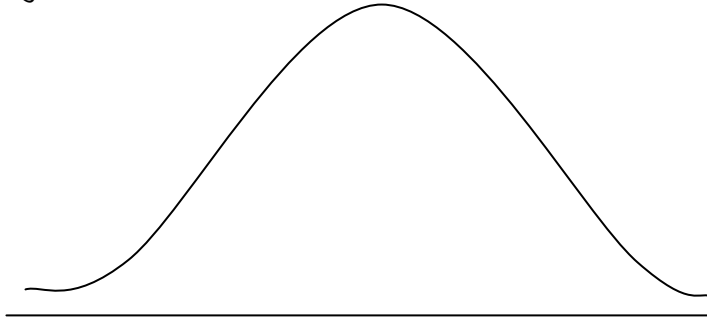
$$\pi = 3.1416$$

$$e = 2.7183$$

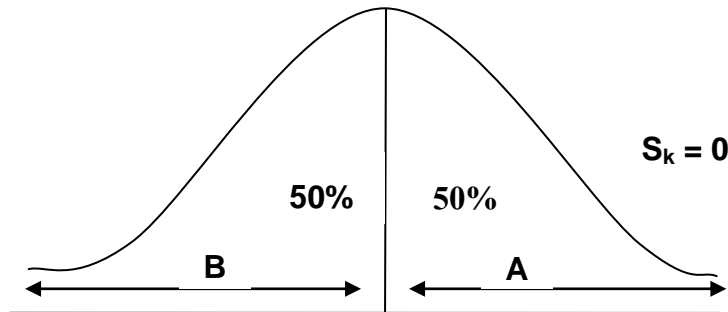
जब N और σ दिया रहता है तो किसी भी x मान के लिए बारंबारता (y) का मान उक्त समीकरण से ज्ञात किया जा सकता है।

3.10 प्रसामान्य वक्र की विशेषताएँ (Features of a Normal Curve)

1. इस वक्र का एक ही शीर्ष बिन्दु होता है, अर्थात् यह एक बहुलकीय (Unimodal) वक्र है। इसका आकार घंटीनुमा (Bell Shaped) होता है।

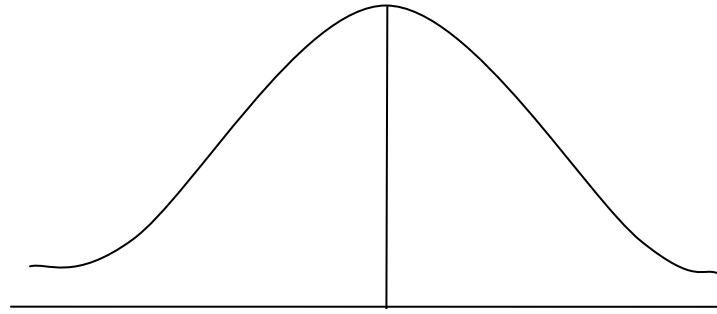


यह एक सममित वक्र (Symmetrical curve) है। अर्थात् माध्य से या बीच से दायें का भाग बायें भाग का दर्पण प्रतिबिम्ब होता है। मध्य से दायें भाग का क्षेत्रफल और मध्य से बायें भाग का क्षेत्रफल, दोनों का मान एक समान होता है। इसका विषमता गुणांक 0 यानि यह Mesokurtic वक्र होता है।



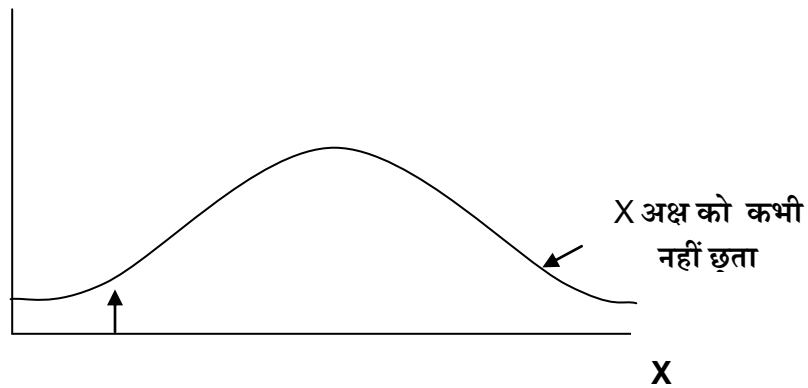
A भाग का क्षेत्रफल = B भाग का क्षेत्रफल

2. एक प्रसामान्य वक्र में माध्य, मध्यका एवं बहुलक बराबर तथा वक्र के मध्य में स्थित होते हैं।

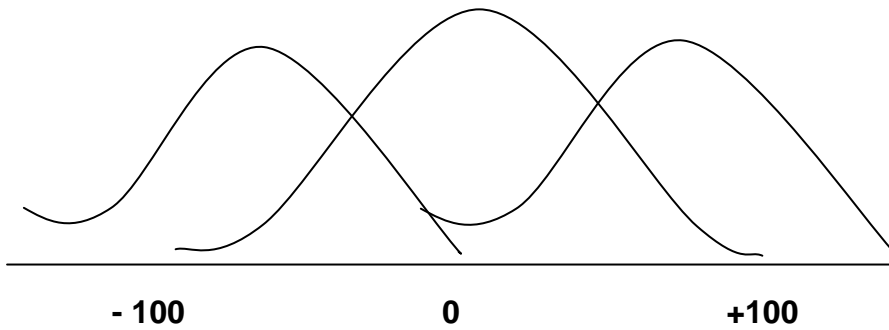


Mean = Median = Mode

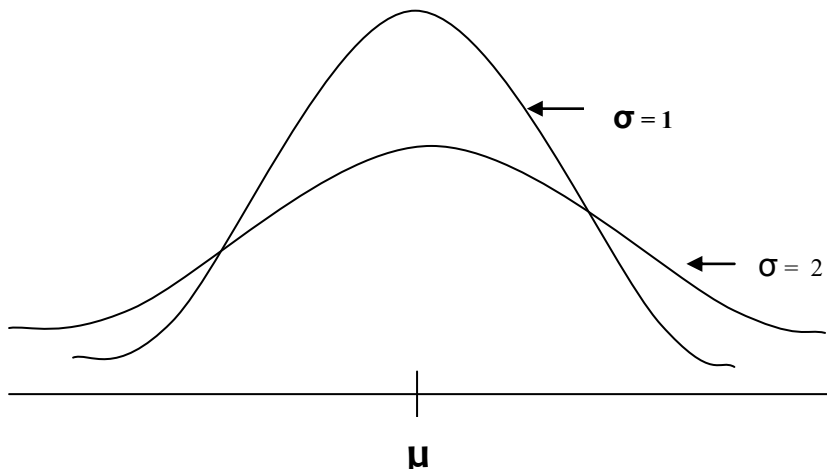
3. प्रसामान्य वक्र की दोनों बाहु अपरिमित (Infinite) रूप से विस्तृत होती है। यही कारण है कि यह आधार रेखा को कभी नहीं छूता। अर्थात् यह वक्र asymptotic होता है।



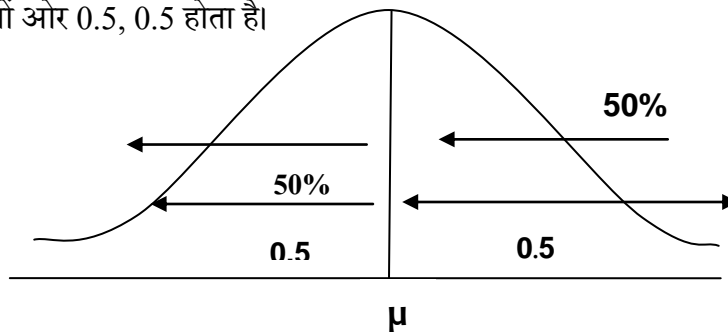
4. इस वक्र के दो प्राचल होते हैं, समान्तर माध्य (μ) तथा प्रमाप विचलन (σ)। प्रत्येक μ तथा σ के समुच्चय के लिए एक नया प्रसामान्य वक्र होता है। अतः प्रसामान्य वक्र एक न होकर अनेक होते हैं, अतः विभिन्न प्रसामान्य वक्रों का एक ही परिवार होता है।
5. समान्तर माध्य की दायीं ओर के हिस्से का प्रतिबिम्ब बायां हिस्सा होता है अतः कागज पर प्रसामान्य वक्र का चित्र बनाकर बीच में मोड़ने पर एक हिस्सा दूसरे हिस्से को पूरी तरह ढक लेता है।
6. प्रसामान्य वक्र का माध्य ऋणात्मक, शून्य अथवा धनात्मक कोई भी संख्या हो सकती है।



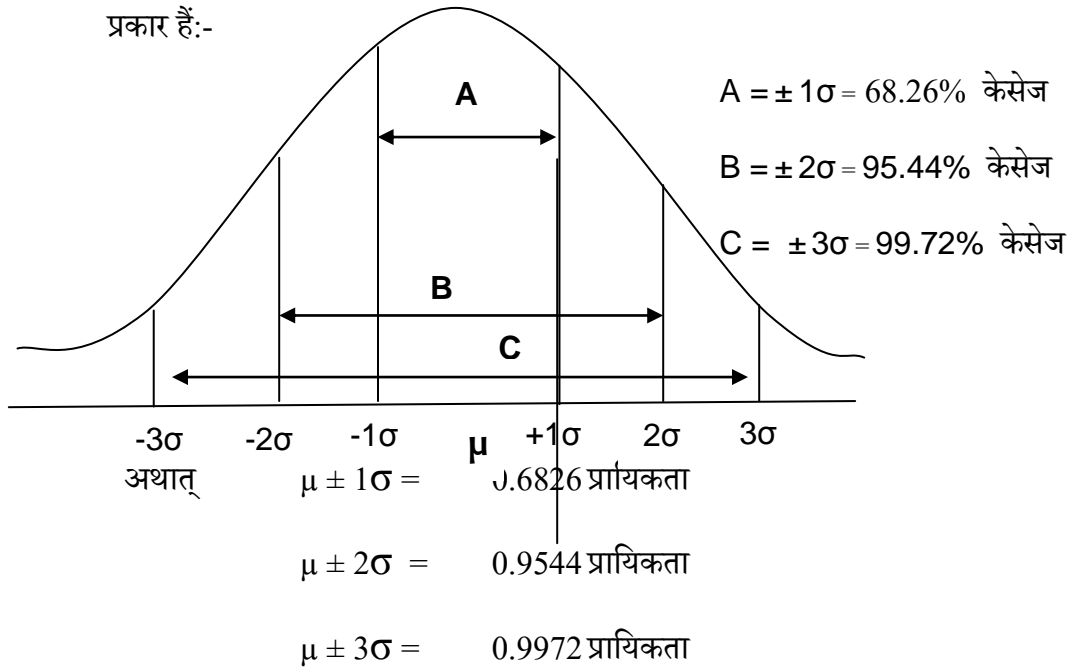
7. प्रमाप विचलन, वक्र की चौड़ाई को निर्धारित करता है। यदि प्रमाप विचलन कम है तो वक्र की चौड़ाई कम होगी तथा यदि प्रमाप विचलन अधिक है तो वक्र की चौड़ाई अधिक होगी।



8. किसी भी सतत् प्रायिकता बंटन के वक्र का कुल क्षेत्रफल 1 होता है, क्योंकि प्रसामान्य वक्र भी एक सतत् प्रायिकता बंटन है। अतः इसके अन्तर्गत कुल क्षेत्रफल 1 होता है। क्षेत्रफल ही प्रायिकता है। माध्य के दायीं ओर का क्षेत्रफल बायीं ओर के क्षेत्रफल के बराबर होता है। अतः यह दोनों ओर 0.5, 0.5 होता है।



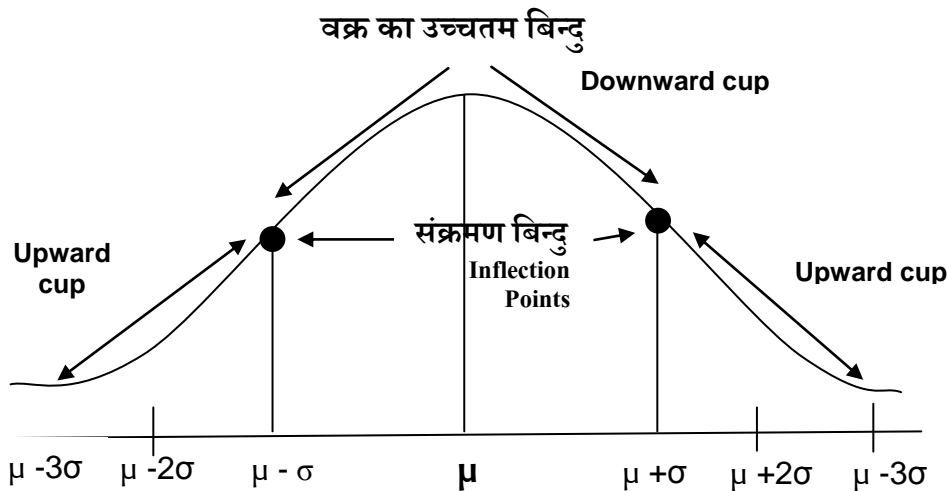
9. प्रसामान्य दैव चर (Normal Random Variable) के लिए प्रायिकता क्षेत्रफल के आधार पर निर्धारित की जा सकती है। कुछ निश्चित अन्तरालों के लिए प्रायिकताएँ निम्न प्रकार हैं:-



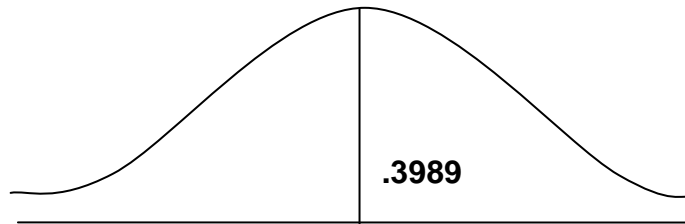
10. प्रसामान्य वक्र के प्रमाप विचलन (S.D.), माध्य विचलन (MD) तथा चतुर्थक विचलन (QD) में निम्नलिखित संबंध होता है:-

$$4 \sigma = 5 \delta = 6 Q. D.$$

11. किसी भी प्रसामान्य वक्र को मानक प्रसामान्य वक्र (The Standard Normal Curve) में रूपान्तरित किया जा सकता है। प्रसामान्य वक्र का चर X , समान्तर माध्य μ तथा प्रमाप विचलन σ को मानक प्रसामान्य वक्र में रूपान्तरित करने के बाद मानक प्रसामान्य वक्र का चर z (Standard Normal Variable; S.N.V.) समान्तर माध्य $\mu = 0$ तथा प्रमाप विचलन $\sigma = 1$ हो जाता है।
12. प्रसामान्य वक्र में $\mu + \sigma$ और $\mu - \sigma$ के मध्य संक्रमण (Inflection or transitions) बिन्दु होता है, जहाँ से वक्र का रूप अवतल से उत्तल होता जाता है।



13. प्रसामान्य वक्र का उच्चतम बिन्दु माध्य पर केन्द्रित होता है और इकाई प्रसामान्य वक्र (unit normal curve) में इसकी ऊँचाई 0.3989 होती है।



3.11 मानक प्रसामान्य वक्र (The Standard Normal Curve):

इससे पहले यह स्पष्ट किया जा चुका है कि प्रत्येक माध्य तथा प्रमाप विचलन के संचय के लिए एक पृथक प्रसामान्य वक्र का आसंजन (draw) करना होगा। आपको क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हर बार एक प्रसामान्य वक्र की रचना करनी होगी, अन्यथा प्रायिकता का परिकलन नहीं किया जा सकेगा। यह एक कठिन कार्य होगा। इससे बचने का एकमात्र उपाय है कि सभी प्रकार के प्रसामान्य वक्रों को मानक प्रसामान्य वक्र में रूपान्तरित करना। एक बार प्रसामान्य वक्र मानक रूप में रूपान्तरित होने के पश्चात् केवल एक ही वक्र के आधार पर प्रायिकता (क्षेत्रफल) निर्धारित करना सरल होता है।

3.12 मानक प्रसामान्य वक्र की विशेषताएँ (Characteristic of the Standard Normal Curve)

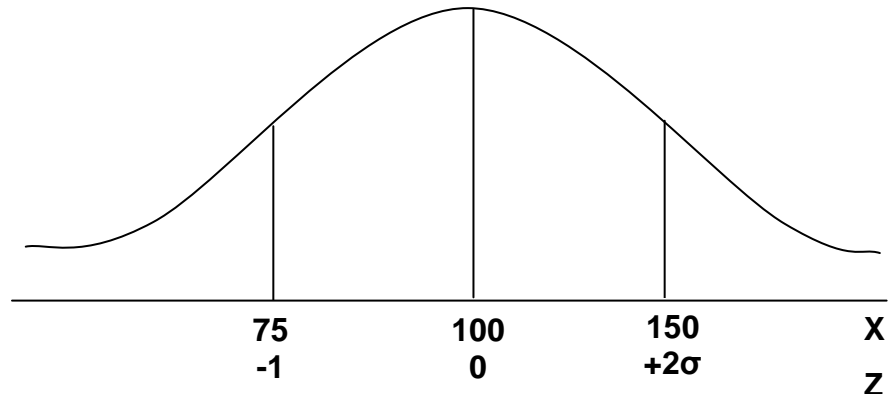
1. मानक प्रसामान्य वक्र का माध्य 0 होता है।
2. मानक प्रसामान्य वक्र का प्रमाप विचलन 1 होता है।
3. इसका शीर्ष बिन्दु शून्य पर स्थित होता है, क्योंकि इसका बहुलक शून्य ही है। इसका मध्यका भी शून्य होता है।
4. इसमें प्रसामान्य वक्र की अन्य सभी विशेषताएँ होती हैं।
5. **Z रूपान्तरण (z-transformation):-** किसी दिये गये प्रसामान्य वक्र को मानक प्रसामान्य वक्र में परिवर्तित करने के लिए X चर को Z चर में परिवर्तित करने को Z रूपान्तरण (z-transformation) कहते हैं। Z रूपान्तरण करने पर समान्तर माध्य 0 तथा प्रमाप विचलन 1 हो जाता है।

उदाहरणस्वरूप यदि किसी प्रसामान्य वक्र का माध्य 100 तथा प्रमाप विचलन 25 है तब 150 का अर्थ $Z = \frac{150-100}{25} = +2$ तथा 75 का अर्थ $\frac{75-100}{25} = -1$ होगा। इसका अर्थ है 150 समान्तर माध्य से Z प्रमाप विचलन आगे (दायीं ओर) है, जबकि 75 समान्तर माध्य से 1 प्रमाप विचलन (बायीं ओर) है।

Z रूपान्तरण का सूत्र- $\frac{X - \mu}{\sigma}$ X = कोई प्राप्तांक

μ = माध्य

σ = प्रमाप विचलन



अभ्यास प्रश्न

1. मानक प्रसामान्य वक्र का माध्य होता है।
2. मानक प्रसामान्य वक्र का प्रमाप विचलनहोता है।
3. मानक प्रसामान्य वक्र में $4\sigma = 5\sigma = 6$ (.....).होता है।
4. मानक प्रसामान्य वक्र में $\mu \pm 2\sigma =$ (.....) प्रायिकता होती है।
5. प्रसामान्य वक्र का उच्चतम बिन्दु माध्य पर केन्द्रित होता है और इकाई प्रसामान्य वक्र (unit normal curve) में इसकी ऊँचाई होती है।
6. प्रसामान्य बंटन दो प्राचल (Parameters) माध्य (Mean) (μ) तथापर आधारित होता है।
7. यदि प्रमाप विचलन कम है तो वक्र की चौड़ाईहोगी।
8. यदि प्रमाप विचलन अधिक है तो वक्र की चौड़ाईहोगी।
9. यदि $k = 0.263$ तो यह वक्रहोगा।
10. Z रूपान्तरण करने पर समान्तर माध्यतथा प्रमाप विचलन 1 हो जाता है।

3.13 प्रसामान्य वक्र की उपयोगिताएँ या अनुप्रयोग (Application of Normal Curve):

प्रसामान्य वक्र या जिसे प्रसामान्य प्रसंभाव्यता वक्र (Normal Probability Curve) भी कहा जाता है, के कुछ प्रमुख अनुप्रयोग को निम्नांकित उदाहरण द्वारा समझा जा सकता है:-

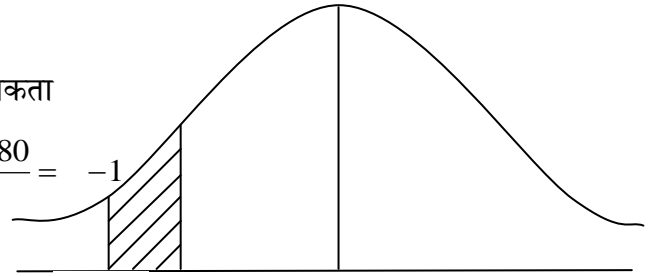
1. प्रसामान्य वक्र द्वारा प्रसामान्य वितरण में दी गई सीमाओं (Limits) के भीतर पड़ने वाले केसेज के प्रतिशत का पता लगाया जाता है। यह प्रसामान्य वक्र की एक प्रमुख उपयोगिता है। जब शोधकर्ता को प्रसामान्य वितरण का माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात होता है तो वह वितरण के किसी भी दो प्राप्तांकों के बीच आने वाले केसेज का पता प्रसामान्य वक्र के द्वारा आसानी से कर लेता है।

उदाहरण:- एक परीक्षा के प्राप्तांकों का बंटन प्रसामान्य बंटन (वितरण) है, इसका माध्य 180 अंक तथा प्रमाप विचलन 40 अंक है। एक परीक्षा में यदि 10,000 विद्यार्थी सम्मिलित हुए तो (अ) 140 से 150 के मध्य अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या बताइए।

हल:- (अ) सर्वप्रथम प्रायिकता ज्ञात करें, इसके बाद प्रायिकता को कुल विद्यार्थियों की संख्या से गुणा करके विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात करें। यहाँ दो बार परिकलन करना होगा-

i. 140 से 180 अंक की प्रायिकता

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{140 - 180}{40} = -1$$



ii. 150 से 180 अंक की प्रायिकता

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{150 - 180}{40} = -0.75$$

$$P = (Z = 0.75) = 0.2734$$

अतः 140 से 150 अंक की प्रायिकता = 0.3413 - 0.2734 = 0.0679

अतः विद्यार्थियों की संख्या = 10,000 X 0.0679 = 679

ii. प्रसामान्य वितरण वक्र द्वारा प्रसामान्य वितरण में दिये गये केसेज के प्रतिशत के आधार पर उनकी सीमाओं का पता लगाया जाता है। जब शोधकर्ता को प्रसामान्य वितरण का माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात होता है और वह वितरण के विशेष प्रतिशत जैसे मध्य 60% या 70% केसेज की सीमाओं का पता लगाना चाहता है, तो वह प्रसामान्य वक्र का उपयोग करता है, क्योंकि इससे वह आसानी से इन सीमाओं के बारे में जान लेता है।

iii. प्रसामान्य वक्र द्वारा किसी समस्या या परीक्षण के एकांश के सापेक्ष कठिनता स्तर (relative difficulty level) ज्ञात किया जा सकता है। प्रसामान्य वक्र का एक महत्त्वपूर्ण अनुप्रयोग यह है कि इसके द्वारा शोधकर्ता किसी प्रश्न, समस्या या किसी परीक्षण के एकांश की सापेक्ष कठिनता स्तर का पता आसानी से लगा लेता है। इसके लिए प्रत्येक प्रश्न या एकांश पर उत्तीर्ण होने वाले छात्रों की प्रतिशत के आधार पर सिगमा या Z प्राप्तांक (Sigma Score) ज्ञात कर लिया जाता है, जो इसकी कठिनता

स्तर होती है और इस कठिनता स्तर को एक दूसरे से घटाकर जो अंतर प्राप्त किया जाता है, इससे प्रश्नों या एकांशों का सापेक्ष कठिनता स्तर का पता लग जाता है।

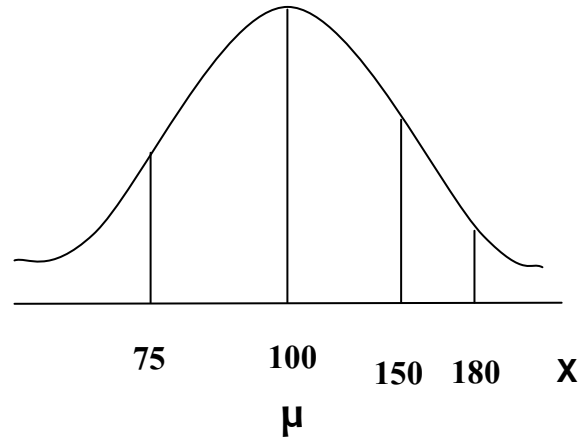
- iv. प्रसामान्य वक्र द्वारा दो वितरणों की अतिव्याप्ति (Overlapping) के रूप में तुलना किया जाता है। प्रसामान्य वक्र की चौथी उपयोगिता यह है कि इसके द्वारा दो वितरणों की तुलना अतिव्याप्ति के रूप में की जाती है। जब शोधकर्ता यह पता लगाना चाहता है कि दिए गए दो वितरणों में माध्य माध्यिका (Median) तथा मानक विचलन के ख्याल से कहां तक अतिव्याप्ति है तो इसके लिए प्रसामान्य वक्र का सहारा लेता है।
- v. प्रसामान्य वक्र द्वारा किसी समूह को उपसमूह में आसानी से प्रसामान्य रूप से वितरित शीलगुण या चर के आधार पर बाँटा जाता है। प्रसामान्य वक्र का उपयोग प्रायः शोधकर्ता वैसी परिस्थिति में करता है जहाँ प्रसामान्य रूप से किसी वितरित, किसी शीलगुण या चर पर दिए गए समूह के कई छोटे-छोटे उपसमूहों में बाँटना होता है। यह कार्य भी Z- score ज्ञात करके किया जाता है।

अतः यह स्पष्ट है कि प्रसामान्य वक्र की अनेक उपयोगिताएं हैं, जिनके कारण इस वक्र की लोकप्रियता व्यावहारिक विज्ञान के क्षेत्र में बहुत ज्यादा है।

3.14 प्रसामान्य वक्र में प्रायिकता निर्धारित करना (Determination of Probability under the Normal Curve) :

1. प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत प्रायिकता ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम आप एक प्रसामान्य वक्र का चित्र बनाएँ।
2. इसके मध्य में समान्तर माध्य लिख लें।
3. अब प्रायिकता ज्ञात करने के लिए X के मूल्यों को सूत्र द्वारा Z में रूपान्तरित कर लें।
4. मानक प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत क्षेत्रफल (Area under the normal curve) की सारणी जो इस स्व-अधिगम सामग्री पुस्तिका के पीछे दी गई है, के आधार पर क्षेत्रफल ज्ञात कर लें। क्षेत्रफल ही प्रायिकता है।
5. प्रायिकता ज्ञात करते समय यह ध्यान रखें कि सारणी में क्षेत्रफल सदैव समान्तर माध्य ($Z = 0$) से X मूल्य (Z का परिकल्पित मूल्य) तक दिया जाता है, अतः क्षेत्रफल (प्रायिकता) तदनुसार निर्धारित की जाती है। प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत कुल क्षेत्रफल 1.0 होता है जो माध्य के दायीं ओर 0.5 तथा बायीं ओर भी 0.5 होता है।

उदाहरण द्वारा स्पष्टीकरण:-



- i. किसी मूल्य के 100 से 150 के मध्य होने की प्रायिकता :-

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \rightarrow \quad \frac{150 - 100}{25} = Z$$

Area (Z= 2) = 0.47725 (सारणी से)

अतः वांछित प्रायिकता = 0.47725

- ii. किसी मूल्य के 150 से कम होने की प्रायिकता

आप जानते हैं कि समान्तर माध्य से किसी मूल्य के कम होने की प्रायिकता = 0.5, जबकि समान्तर माध्य (100 से 150 तक की प्रायिकता) उपर्युक्त (i) के अनुसार 0.47725 है अतः वांछित प्रायिकता = 0.5 + 0.47725 = 0.97725

- iii. किसी मूल्य के 150 से अधिक होने की प्रायिकता

= प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत कुल क्षेत्रफल- किसी मूल्य के 150 से कम होने की प्रायिकता = 1 - 0.97725 = 0.02275

किसी मूल्य के 75 से 150 के मध्य होने की प्रायिकता:-

यहाँ यह ध्यान रखना चाहिए कि प्रसामान्य वक्र के क्षेत्रफल निर्धारण का सन्दर्भ बिन्दु सदैव माध्य होता है अतः वांछित प्रायिकता दो अलग-अलग भागों में परिकलित करेंगे।

किसी मूल्य के 75 से 100 के मध्य होने की प्रायिकता + किसी मूल्य के 100 से 150 के मध्य होने की प्रायिकता।

$$Z = \frac{75-100}{25} = -1$$

$$Z = -1 \text{ के लिए क्षेत्रफल } 0.34134$$

$$\text{अतः वांछित प्रायिकता } (0.34134+0.47725) = 0.81859$$

टिप्पणी:- $Z = -1$ से विचलित होने की आवश्यकता नहीं है, Z के ऋणात्मक मूल्य का अर्थ होता है। माध्य के बायीं ओर जबकि Z के धनात्मक मूल्य का अर्थ होता है, माध्य के दायीं ओर। लेकिन Z के ऋणात्मक मूल्य के कारण प्रायिकता को ऋणात्मक नहीं कर दें, अन्यथा अनर्थ हो जाएगा। क्षेत्रफल (प्रायिकता) कभी भी ऋणात्मक नहीं हो सकता।

(iv) किसी मूल्य के 150 से 180 के मध्य होने की प्रायिकता:- सन्दर्भ सदैव माध्य रहता है, अतः दो अलग-अलग माप करेंगे, 100 से 150 तथा 100 से 180: यहाँ 100 से 180 की माप के लिए $Z = \frac{180-100}{25} = 3.2$

$$Z = 3.2 \text{ के लिए क्षेत्रफल } = 0.49931$$

$$\text{अतः वांछित प्रायिकता } = 0.49931 - 0.47725 = 0.02206$$

(v) किसी मूल्य के 75 से कम होने की प्रायिकता:- आपने 75 से 100 तक का क्षेत्रफल 0.34134 (iv) में ज्ञात किया है, जबकि माध्य से बायीं ओर का कुल क्षेत्रफल 0.5 होता है। अतः वांछित प्रायिकता माध्य से बायीं ओर का कुल क्षेत्रफल - 75 से 100 तक का क्षेत्रफल = $0.5 - 0.34134 = 0.15866$

(vi) किसी मूल्य के 75 होने की प्रायिकता:- एक सतत् आवृत्ति बंटन में किसी वर्गान्तर का क्षेत्रफल (प्रायिकता) ज्ञात किया जा सकता है न कि किसी निश्चित मूल्य का।

इसका कारण यह है कि किसी चर की रेखा में अनन्त बिन्दु होते हैं, उनमें से किसी एक निश्चित बिन्दु के होने की प्रायिकता सैद्धान्तिक रूप से $\frac{1}{\infty} = 0$ होती है।

3.15 सामान्य संभावना वक्र के उपयोग के उदाहरण (Examples of the application of Normal Probability Curve) :

(i) दी हुई सीमाओं के मध्य प्राप्तांकों का प्रतिशत ज्ञात करना (To find out the percentage of cases within given limits)

उदाहरण:- एक प्रसामान्य वितरण में समान्तर माध्य (M) 80 और प्रमाप विचलन 10 है। गणना करके बताइये कि निम्नलिखित सीमाओं के मध्य कितने प्रतिशत केसेज होंगे।

- 70 से 90 के मध्य
- 90 से 100 के मध्य

हल (a) 70 का Z स्कोर $= \frac{70-80}{10} = \frac{-10}{-10} = -1\sigma$

90 का Z स्कोर $= \frac{90-80}{10} = \frac{10}{10} = +1\sigma$

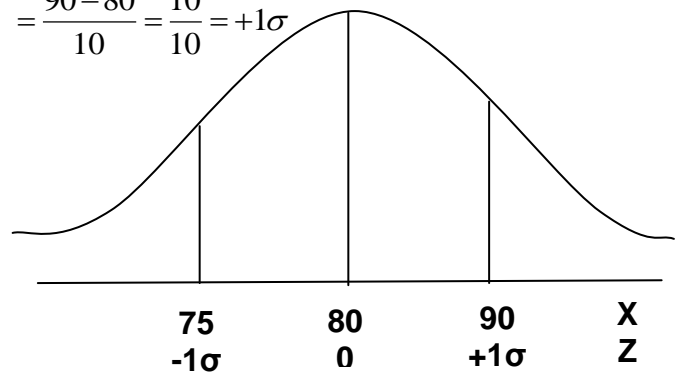
70 से 90 के मध्य केसेज

= $\pm 1\sigma$ व -1σ के

मध्य केसेज का प्रतिशत

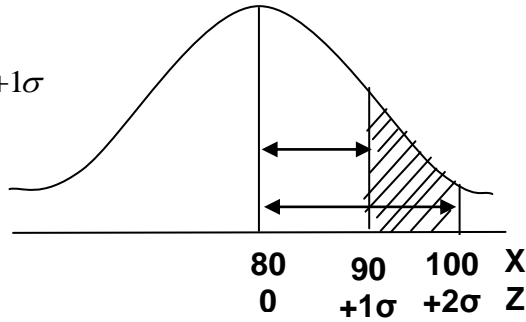
= $34.13 + 34.13$

= 68.26 प्रतिशत केसेज



(ब) 90 का Z स्कोर $= \frac{90-80}{10} = \frac{10}{10} = +1\sigma$

100 का Z स्कोर $= \frac{100-80}{10} = +2\sigma$



प्रसामान्य वितरण वक्र में 0 से +2 σ के मध्य प्रतिशत केसेज = 47.72

प्रसामान्य वितरण वक्र में 0 से +1 σ के मध्य प्रतिशत केसेज = 34.13

अतः +1 σ और +2 σ के मध्य प्रतिशत केसेज = 47.72- 34.13 = 13.59

(ii) दो अतिव्यापी अंक वितरणों के प्राप्तांको का अध्ययन (To Compare the two Overlapping Distribution)

उदाहरण:- किसी एक बुद्धि परीक्षण के छात्रों का मध्यमान 120 तथा प्रमाप विचलन 8.0 है तथा छात्राओं का मध्यमान 124 तथा प्रमाप विचलन 10.0 है। कितने प्रतिशत छात्राओं का मध्यमान छात्रों के मध्यमान से ऊपर है, इसकी गणना करें।

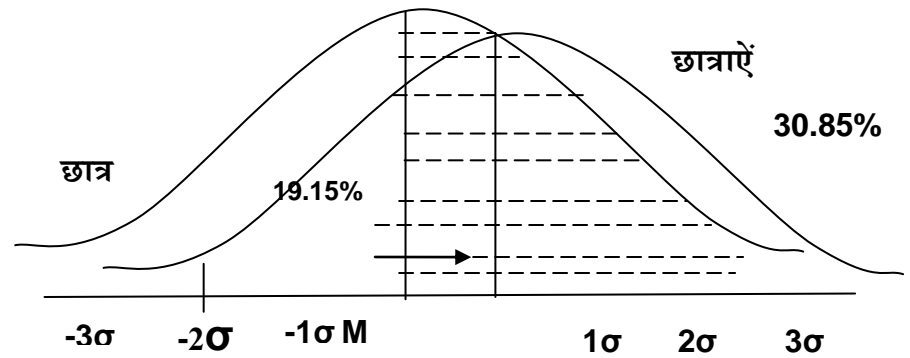
हल:- प्रस्तुत उदाहरण में छात्राओं का मध्यमान छात्रों से 124-120 = 4 ऊपर है। यदि छात्रों के मध्यमान को आधार माना जाय तो यह कहा जा सकता है कि छात्राओं का मध्यमान छात्रों के $4/8 \sigma = 0.56$ दायीं ओर स्थित है। तालिका के अनुसार मध्यमान से 0.56 तक 19.15 प्रतिशत तक केसेज आते हैं। चूंकि मध्यमान से दायीं दिशा (+) में 50 प्रतिशत केसेज आते हैं, अतः छात्रों की अपेक्षा छात्राओं का मध्यमान 50-19.15 = 30.85% आगे है।

छात्र का M = 120

σ = 8.0

छात्राओं का M = 124

σ = 10.0



(iii) मनोवैज्ञानिक परीक्षणों में पद कठिनाई के स्तर को निर्धारित करना (To determine the level of item difficulty)

उदाहरण:- एक प्रमाणीकृत परीक्षण के A, B, C तथा D प्रश्नों को हल करने में छात्र क्रमशः 50%, 40%, 35% तथा 15% असफल रहे। प्रश्नों के कठिनाई स्तर की गणना करते हुए इसकी व्याख्या कीजिए।

प्रश्न	सफल छात्रों का %	असफल छात्रों का %	असफल छात्रों की मध्यमान से दूरी	कठिनाई स्तर या असफल छात्रों की M से σ दूरी
A	50%	50%	50 - 50 = 0%	0.006
B	40%	60%	60 - 50 = 10%	0.256
C	35%	65%	65 - 50 = 15%	0.396
D	20%	80%	80 - 50 = 30%	0.846

NPC में परीक्षण के प्रश्नों की कठिनाई स्तर की व्याख्या σ के आधार पर की जाती है। धनात्मक दिशा में मध्यमान से सिग्मा दूरी जितनी अधिक होती है, परीक्षण के प्रश्न का कठिनाई स्तर उतना ही अधिक होता है। परीक्षा के विभिन्न प्रश्नों का तुलनात्मक कठिनाई स्तर निम्न प्रकार से है:-

$$A \text{ से } B \text{ प्रश्न } (0.256 - 0.006) = 0.256 \text{ अधिक कठिन है}$$

B से C प्रश्न $(0.396 - 0.256) = 0.146$ अधिक कठिन है

B से D प्रश्न $(0.846 - 0.256) = 0.596$ अधिक कठिन है

A से C प्रश्न $(0.396 - 0.006) = 0.396$ अधिक कठिन है

C से D प्रश्न $(0.846 - 0.396) = 0.456$ अधिक कठिन है

(iv) आवृत्ति ज्ञात करना (Calculate the frequency):-

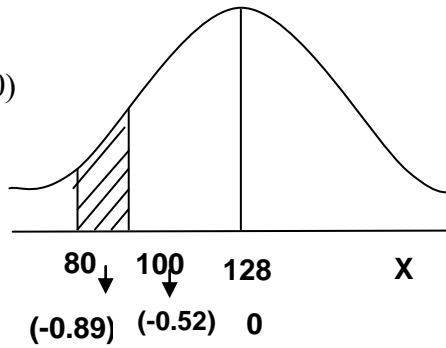
प्रसामान्य वितरण में आवृत्ति ज्ञात करते समय प्रायिकता (P) को कुल आवृत्ति (N) से गुणा करना होता है। अतः आवृत्ति = NXP

उदाहरण:- एक दैव चर (Random Variable) का बंटन (Distribution) प्रसामान्य है, जिसका माध्य 128 है तथा प्रमाप विचलन 54 है ज्ञात कीजिए।

- (a) $P(80 < x < 100)$
- (b) $P(x > 40)$
- (c) $P(x < 144)$
- (d) $P(x < 60)$ or $P(x > 180)$

हल:- (a) $Z_1 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{80 - 120}{54} = -0.89$

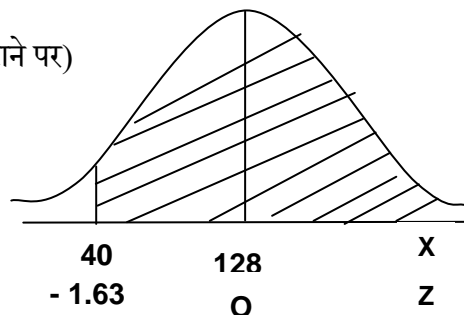
$Z_2 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{100 - 128}{54} = -0.52$



Area ($Z_1 = -0.89$) = 0.3133

Area ($Z_2 = -0.52$) = 0.1985 (घटाने पर)

$P(80 < x < 100) = 0.1148$



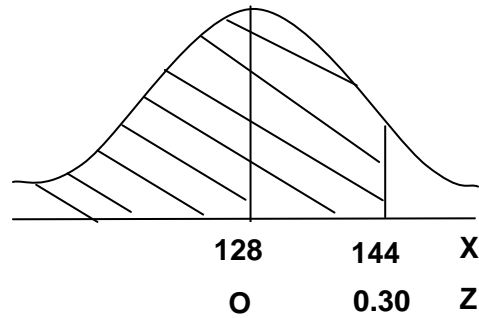
(b) $Z = \frac{40 - 128}{54} = 1.63$

Area (Z= ÷1.63) = 0.44845

Area (above 128) = 0.50000 (जोड़ने पर)

P (x > 40) = .94845

(c) $Z = \frac{144-128}{54} = \frac{16}{54} = 0.30$



Area (Z = 0.30) = 0.1179

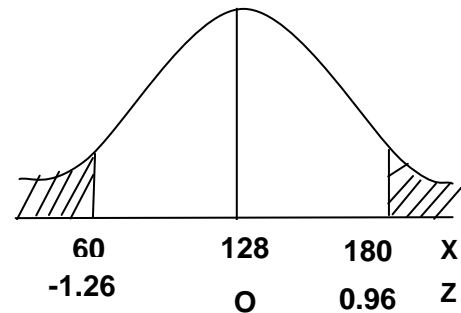
Area (below 128) = 0.5000

P (X < 144) = 0.6179

(d) $Z_1 = \frac{60-128}{54} = -1.26$

Area(below 128) = 0.50000

Area (Z₁ = - 1.26) = 0.39617 (+)
 = 0.10383



$Z_2 = \frac{180-128}{54} = 0.96$

Area above (128) = 0.50000

Area (Z₂ = 0.96) = 0.3315

0.1685

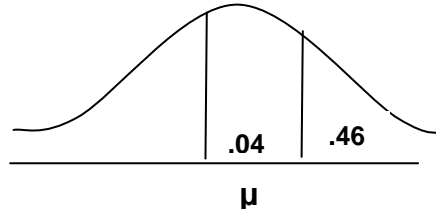
P (x < 60) or P (x >180)

= 0.10383 + 0.1685

$$= 0.27233$$

उदाहरण:- किसी एक परीक्षा में पास होने वाले विशेष योग्यता प्राप्त करने वाले विद्यार्थी क्रमशः 46% तथा 90% थे। अभ्यर्थियों द्वारा प्राप्त औसत प्राप्तांकों का अनुमान लगाइए, जबकि न्यूनतम पास प्राप्तांक तथा विशेष योग्यता प्राप्तांक क्रमशः 40 तथा 75 है। यह मानिए कि प्राप्तांकों का वितरण सामान्य है।

हल:- यहाँ पास विद्यार्थी 46 प्रतिशत है, अतः फेल विद्यार्थी 54% होंगे, 50% तक विद्यार्थी H से ऊपर होंगे।



$$Z (P = 0.4) = 0.1$$

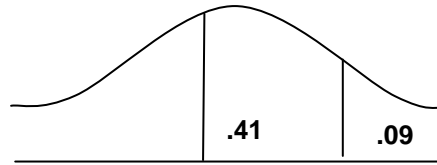
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}, \quad 0.1 = \frac{40 - \mu}{\sigma} \quad \rightarrow \quad 0.1 \sigma = 40 - \mu \quad - (i)$$

$$Z (P = .41) = 1.34$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}, \quad 1.34 = \frac{75 - \mu}{\sigma} \quad \rightarrow \quad 1.34 \sigma = 75 - \mu \quad - (ii)$$

(i) में (ii) को घटाने पर

$$\begin{array}{r} 0.1\sigma = 40 - \mu \\ 1.34\sigma = 75 - \mu \\ \hline - + \\ -1.24 \sigma = -35 \end{array}$$



$$\sigma = \frac{-35}{-1.24} = 28.22$$

σ का मान (i) में रखने पर

$$0.1(28.22) = 40 - \mu$$

$$2.822 - 40 = -\mu$$

$$\mu = 37.178$$

अतः औसत अंक 37.178 तथा प्रमाप विचलन 28.22 अंक हैं।

उदाहरण: एक प्रसामान्य बंटन (Normal distribution) के 20 प्रतिशत मूल्य 45 से कम हैं तथा 15 प्रतिशत मूल्य 70 से अधिक बंटन का समान्तर माध्य तथा प्रसरण (Variance) ज्ञात कीजिए।

हल:

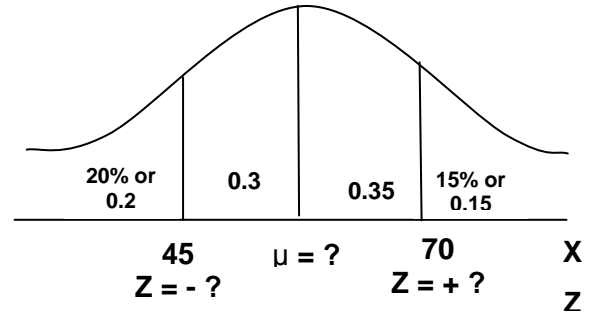
$$\sigma^2 = ? \quad \mu = ?$$

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$Z = - ? \quad Z = + ?$$

$$Z (P=0.35) = + 1.04$$

$$Z (P = 0.30) = - 0.84$$



$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \rightarrow + 1.04 = \frac{70 - \mu}{\sigma} \rightarrow \mu + 1.04 \sigma = 70 \quad \text{--- (i)}$$

$$-0.84 = \frac{45 - \mu}{\sigma} \rightarrow \mu - 0.84 \sigma = 45 \quad \text{--- (ii)}$$

समीकरण (i) में से समीकरण (ii) को घटाने पर $1.88 \sigma = 25$

$$\sigma = 13.30$$

σ का मान समीकरण (i) में रखने पर $\mu + 13.83 = 70$

$$\mu = 56.17$$

अतः बंटन का प्रसरण (Variance) $\sigma^2 = (13.3)^2 = 176.89$

माध्य 56.17 है।

उदाहरण:- एक कक्षा में 75 छात्र हैं जिनके औसत प्राप्तांक 50 तथा प्रमाप विचलन 5 है। कितने विद्यार्थियों ने 60 से अधिक अंक प्राप्त किए।

हल:- दिया गया है, $\bar{X} = 50$ और $\sigma = 5$: हमें ऐसे विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात करनी है, जिनके 60 से अधिक प्राप्तांक आए हैं, अतः $X = 60$

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}, \quad Z = \frac{60 - 50}{5} = 2$$

Z का प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत क्षेत्रफल = 0.4772

60 से अधिक के लिए क्षेत्रफल = 0.5 - .4772 = 0.0228

अतः 60 से अधिक अंक पाने वाले विद्यार्थियों की संख्या = NP = 0.0228x75 = 1.71 = 2

अतः 60 से अधिक अंक पाने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 2

अभ्यास प्रश्न

11.वितरण में आवृत्तियों के बढ़ने व घटने के क्रम में अन्तर पाया जाता है।
12. धनात्मक विषमता रखने वाले वितरण में समान्तर माध्य का मूल्य (\bar{X}), मध्यका (M_d) तथा बहुलक (Z) सेहोता है।
13. यदि वक्र का झुकाव दाहिनी ओर न होकर बायीं ओर अधिक हो तो विषमता..... होगी।
14. सामान्य वितरण सदैव के आकार का होता है।
15.का माप एक ऐसा संख्यात्मक माप है, जो किसी श्रेणी की असममितता (Asymmetry) को प्रकट करता है।
16.एक सांख्यिकीय माप है, जो वक्र के शीर्ष की प्रकृति पर प्रकाश डालती है।
17. प्रसामान्य वक्र का उच्चतम बिन्दु पर केन्द्रित होता है।
18. पृथुशीर्षत्व का माप एवं द्वितीय केन्द्रीय परिघातों (Moments) के आधार पर परिघात अनुपात (Moments Ratio) द्वारा ज्ञात किया जाता है।
19. एक प्रसामान्य वक्र में माध्य, मध्यका एवं बहुलक बराबर तथा वक्र के में स्थित होते हैं।
20. प्रसामान्य वक्र की दोनों बाहु..... रूप से विस्तृत होती है।

3.16 सारांश

प्रस्तुत इकाई में आप सामान्य वितरण वक्र की विशेषताएं और उपयोगिताएँ, विषमता व पृथुशीर्षत्व के मान के परिकलन के बारे में अध्ययन किया। यहाँ पर इन सभी अवधारणाओं का संक्षिप्त विवरण दिया जा रहा है।

सममित अथवा सामान्य वितरण (Symmetrical or Normal Distribution): इस प्रकार के वितरण में आवृत्तियाँ एक निश्चित क्रम से बढ़ती हैं फिर एक निश्चित बिन्दु पर अधिकतम होने के पश्चात् उसी क्रम से घटती है। यदि आवृत्ति वितरण का वक्र तैयार किया जाय तो वह सदैव घण्टी के आकार (Bell Shaped) का होता है, जो इसकी सामान्य स्थिति को प्रदर्शित करता है।

असममित वितरण अथवा विषम वितरण (Asymmetrical Distribution): असममित वितरण में आवृत्तियों के बढ़ने व घटने के क्रम में अन्तर पाया जाता है। आवृत्तियाँ जिस क्रम में बढ़ती है अधिकतम बिन्दु पर पहुँचने के पश्चात् उसी क्रम में नहीं घटती। ऐसे वितरण का वक्र घण्टी के आकार वाला व दायें या बायें झुकाव लिए हुए होता है।

धनात्मक विषमता (Positive Skewness) : यदि वक्र का झुकाव दाहिनी ओर है तो उस वक्र में धनात्मक विषमता होगी। धनात्मक विषमता रखने वाले वितरण में समान्तर माध्य का मूल्य (\bar{X}), मध्यका (M_d) तथा बहुलक (Z) से अधिक होता है।

ऋणात्मक विषमता (Negative Skewness) : यदि वक्र का झुकाव दाहिनी ओर न होकर बायीं ओर अधिक हो तो विषमता ऋणात्मक होगी।

विषमता का माप एक ऐसा संख्यात्मक माप है, जो किसी श्रेणी की असममितता (Asymmetry) को प्रकट करता है। एक वितरण को विषम कहा जाता है, जबकि उसमें सममितता (Symmetry) का अभाव हो, अर्थात् मापों के विस्तार के एक ओर या दूसरी ओर ही मूल्य केन्द्रित हो जाते हैं।

विषमता गुणांक का परिकलन निम्नलिखित तीन प्रकार से किया सकता है, जो इस प्रकार है:-

1. कार्ल पियर्सन का माप (Karl Pearson's Measure)
2. बाउले का माप (Bowley's Measure)
3. केली का माप (Kelly's Measure)

पृथुशीर्षत्व या कुकुदता एक सांख्यिकीय माप है, जो वक्र के शीर्ष की प्रकृति (Peak of a curve) पर प्रकाश डालती है। ग्रीक भाषा में इस शब्द का अर्थ फुलावट (Bulginess) होता है। सांख्यिकी में पृथुशीर्षत्व से तात्पर्य एक आवृत्ति वक्र के बहुलक के क्षेत्र में चपटेपन या नुकीलापन की मात्रा से है।

कार्ल पियर्सन ने 1905 में पृथुशीर्षत्व या कुकुदता के प्रकार के लिए निम्न तीन शब्दों का प्रयोग किया था:-

- i. LEPTOKURTIC (लेप्टोकर्टिक): नुकीले शीर्ष वाला वक्र (Peaked Curve)
- ii. PLATYKURTIC (प्लेटीकर्टिक) : चपटे शीर्ष वाला वक्र (Flat-topped Curve)
- iii. MESOKURTIC (मेसोकर्टिक) : सामान्य वक्र (Normal Curve)

पृथुशीर्षत्व का माप चतुर्थ एवं द्वितीय केन्द्रीय परिघातों (Moments) के आधार पर परिघात अनुपात (Moments Ratio) द्वारा ज्ञात किया जाता है।

प्रसामान्य/सामान्य बंटन या वितरण (Normal Distribution) एक सतत् प्रायिकता बंटन (Continuous Random Distribution) है। इसका प्रायिकता घनत्व फलन (Probability Density Function) घंटीनुमा आकार (Bell Shaped) का वक्र (Curve) होता है तथा यह वक्र प्रसामान्य बंटन के दो प्राचल (Parameters) माध्य (Mean) (μ) तथा प्रमाप विचलन (Standard Deviation) (σ) पर आधारित होता है।

प्रसामान्य वक्र की विशेषताएँ (Features of a Normal Curve) इस प्रकार हैं :

1. इस वक्र का एक ही शीर्ष बिन्दु होता है, अर्थात् यह एक बहुलकीय (Unimodal) वक्र है। इसका आकार घंटीनुमा (Bell Shaped) होता है।
2. यह एक सममित वक्र (Symmetrical curve) है।
3. एक प्रसामान्य वक्र में माध्य, मध्यका एवं बहुलक बराबर तथा वक्र के मध्य में स्थित होते हैं।
4. प्रसामान्य वक्र की दोनों बाहु अपरिमित (Infinite) रूप से विस्तृत होती है।
5. इस वक्र के दो प्राचल होते हैं, समान्तर माध्य (μ) तथा प्रमाप विचलन (σ)।
6. समान्तर माध्य की दायीं ओर के हिस्से का प्रतिबिम्ब बायां हिस्सा होता है।
7. प्रसामान्य वक्र का माध्य ऋणात्मक, शून्य अथवा धनात्मक कोई भी संख्या हो सकती है।
8. प्रमाप विचलन, वक्र की चौड़ाई को निर्धारित करता है।
9. किसी भी सतत् प्रायिकता बंटन के वक्र का कुल क्षेत्रफल 1 होता है।
10. प्रसामान्य वक्र का उच्चतम बिन्दु माध्य पर केन्द्रित होता है।

प्रसामान्य वक्र या जिसे प्रसामान्य प्रसंभाव्यता वक्र (Normal Probability Curve) भी कहा जाता है, के कुछ प्रमुख अनुप्रयोग निम्नांकित हैं:

1. प्रसामान्य वक्र द्वारा प्रसामान्य वितरण में दी गई सीमाओं (Limits) के भीतर पड़ने वाले केसेज के प्रतिशत का पता लगाया जाता है। यह प्रसामान्य वक्र की एक प्रमुख उपयोगिता है।
2. प्रसामान्य वितरण वक्र द्वारा प्रसामान्य वितरण में दिये गये केसेज के प्रतिशत के आधार पर उनकी सीमाओं का पता लगाया जाता है।
3. प्रसामान्य वक्र द्वारा किसी समस्या या परीक्षण के एकांश के सापेक्ष कठिनता स्तर (relative difficulty level) ज्ञात किया जा सकता है।
4. प्रसामान्य वक्र द्वारा दो वितरणों की अतिव्याप्ति (Overlapping) के रूप में तुलना किया जाता है।

3.17 शब्दावली

1. **सममित अथवा सामान्य वितरण (Symmetrical or Normal Distribution):** जब किसी वितरण में आवृत्तियाँ एक निश्चित क्रम से बढ़ती हैं फिर एक निश्चित बिन्दु पर अधिकतम होने के पश्चात् उसी क्रम से घटती है।
2. **असममित वितरण अथवा विषम वितरण (Asymmetrical Distribution):** असममित वितरण में आवृत्तियों के बढ़ने व घटने के क्रम में अन्तर पाया जाता है।
3. **विषमता (Skewness):** एक वितरण को विषम कहा जाता है, जबकि उसमें सममितता (Symmetry) का अभाव हो, अर्थात् मापों के विस्तार के एक ओर या दूसरी ओर ही मूल्य केन्द्रित हो जाते हैं।
4. **धनात्मक विषमता (Positive Skewness) :** यदि वक्र का झुकाव दाहिनी ओर है तो उस वक्र में धनात्मक विषमता होगी। धनात्मक विषमता रखने वाले वितरण में समान्तर माध्य का मूल्य (\bar{X}) मध्यका (M_d) तथा बहुलक (Z) से अधिक होता है।
5. **ऋणात्मक विषमता (Negative Skewness):** यदि वक्र का झुकाव दाहिनी ओर न होकर बायीं ओर अधिक हो तो विषमता ऋणात्मक होगी।
6. **पृथुशीर्षत्व (Kurtosis):** पृथुशीर्षत्व या कुकुदता एक सांख्यिकीय माप है, जो वक्र के शीर्ष की प्रकृति (Peak of a curve) पर प्रकाश डालती है। सांख्यिकी में पृथुशीर्षत्व से तात्पर्य एक आवृत्ति वक्र के बहुलक के क्षेत्र में चपटेपन या नुकीलापन की मात्रा से है।

-
7. प्रसामान्य/सामान्य बंटन या वितरण (Normal Distribution): यह एक सतत् प्रायिकता बंटन (Continuous Random Distribution) है। इसका प्रायिकता घनत्व फलन (Probability Density Function) घंटीनुमा आकार (Bell Shaped) का वक्र (Curve) होता है।
-

3.18 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर

1. 0
2. 1
3. Q.D.
4. 0.9544
5. 0.3989
6. प्रमाप विचलन (Standard Deviation) (σ)
7. कम
8. अधिक
9. सामान्य (Mesokurtic)
10. 0
11. असममित
12. अधिक
13. ऋणात्मक
14. घण्टी
15. विषमता
16. पृथुशीर्षत्व या कुकुदता
17. माध्य
18. चतुर्थ
19. मध्य
20. अपरिमित (Infinite)

3.19 संदर्भ ग्रन्थ सूची/ पाठ्य सामग्री

1. Best, John W. & Kahn (2008). Research in Education, New Delhi, PHI.

2. Good, Carter, V. (1963). Introduction to Educational Research, New York, Rand Mc Nally and company.
3. Koul, Lokesh (2002). Methodology of Educational Research New Delhi, Vikas Publishing Pvt. Ltd.
4. Karlinger, Fred N. (2002). Foundations of Behavioural Research, New Delhi, Surjeet Publications.
5. Garret, H.E. (1972). Statistics in Psychology and Education, New York, Vakils, Feffers and Simans Pvt. Ltd.
6. सिंह, ए०के० (2007) : मनोविज्ञान, समाजशास्त्र तथा शिक्षा में शोध विधियाँ, नई दिल्ली, मोतीलाल बनारसी दास
7. गुप्ता, एस०पी० (2008) : मापन एवं मूल्यांकन, इलाहाबाद, शारदा पब्लिकेशन
8. राय, पारसनाथ (2001) : अनुसंधान परिचय, आगरा, लक्ष्मी नारायण अग्रवाल पब्लिकेशन्स

3.20 निबंधात्मक प्रश्न

1. सामान्य वितरण के अर्थ व विशेषताओं को स्पष्ट कीजिए।
2. सामान्य वितरण वक्र की उपयोगिताओं की व्याख्या कीजिए।
3. सामान्य वितरण वक्र पर आधारित समस्याओं को हल कर सकेंगे।
4. विषमता गुणांक से आप क्या समझते हैं? विषमता गुणांक के मान को परिकलित करने के सूत्रों को लिखिए।
5. पृथुशीर्षत्व से आप क्या समझते हैं? पृथुशीर्षत्व गुणांक के मान को परिकलित करने के सूत्रों को लिखिए।
6. 500 छात्रों को 10 समूहों में बांटा गया। यदि छात्रों की योग्यता सामान्य रूप से वितरित है तो प्रत्येक समूह में कितने छात्र होंगे। (उत्तर : 3, 14, 40, 80, 113, 80, 40, 14, 3)
7. यदि एक समूह जिसका कि माध्य 100 तथा मानक विचलन 15 में यह माना जाय कि बुद्धिलब्धि सामान्य रूप से वितरित है तो निम्न बुद्धिलब्धि वाले लोगों का अनुपात निकालिए : (अ) 135 से ऊपर (ब) 120 से ऊपर (स) 90 से नीचे (द) 75 व 125 के मध्य (उत्तर: (अ) .0099 (ब) .0918 (स) .02514 (द) .9050)

इकाई 4: सहसंबंध विधियाँ (Correlation Methods)

- 4.1 प्रस्तावना
- 4.2 उद्देश्य
- 4.3 सहसंबंध का अर्थ व परिभाषाएं
- 4.4 सहसंबंध व कारण-कार्य संबंध
- 4.5 सहसंबंध का महत्त्व
- 4.6 सहसंबंध के प्रकार
- 4.7 सहसंबंध का परिमाण
- 4.8 सहसंबंध के रूप में r की विश्वसनीयता
- 4.9 सरल सहसंबंध ज्ञात करने की विधियाँ
- 4.10 कार्ल पियर्सन सहसंबंध गुणांक
- 4.11 कार्ल पियर्सन के सहसंबंध गुणांक की गणना
- 4.12 वर्गीकृत श्रेणी में सहसंबंध गुणांक
- 4.13 द्विपंक्तिक सहसंबंध
- 4.14 बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध
- 4.15 द्विपंक्तिक सहसंबंध व बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध के मध्य तुलना
- 4.16 सारांश
- 4.17 शब्दावली
- 4.18 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर
- 4.19 संदर्भ ग्रन्थ सूची/ पाठ्य सामग्री
- 4.20 निबंधात्मक प्रश्न

4.1 प्रस्तावना

मानव जीवन से संबंधित सामाजिक शैक्षिक, मनोवैज्ञानिक, आर्थिक, राजनैतिक एवं वैज्ञानिक आदि सभी क्षेत्रों में विभिन्न प्रकार की समंक श्रेणियों में आपस में किसी न किसी प्रकार संबंध पाया जाता

है। उदाहरण के लिए- दुश्चिंता के बढ़ने से समायोजन में कमी, अधिगम बढ़ने से उपलब्धि में वृद्धि गरीबी बढ़ने से जीवन स्तर में कमी आदि। इन स्थितियों में सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए सहसंबंध ज्ञात किया जाता है। इस प्रकार यह कहा जा सकता है कि सहसंबंध दो अथवा अधिक चरों के मध्य संबंध का अध्ययन करता है एवं उस संबंध की मात्रा को मापता है। यहाँ पर आप सहसंबंध का अर्थ, परिभाषा, प्रकृति व इसके मापने के विभिन्न प्रकारों का अध्ययन करेंगे।

4.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययनोपरांत आप-

1. सहसंबंध का अर्थ बता पाएँगे।
2. सहसंबंध के विभिन्न प्रकारों को स्पष्ट कर सकेंगे।
3. सहसंबंध के विभिन्न मापकों का परिकलन कर सकेंगे।
4. सहसंबंध के विभिन्न मापकों की तुलना कर सकेंगे।
5. सहसंबंध गुणांक का अर्थापन कर सकेंगे।
6. कार्ल पियर्सन के सहसंबंध गुणांक की गणना कर सकेंगे।
7. द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक का परिकलन कर सकेंगे।
8. बिंदु द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक की गणना कर सकेंगे।

4.3 सहसंबंध (Correlation) का अर्थ व परिभाषाएं

जब दो या अधिक तथ्यों के मध्य संबंध को अंकों में व्यक्त किया जाय तो उसे मापने एवं सूक्ष्म रूप में व्यक्त करने के लिए जो रीति प्रयोग में लायी जाती है उसे सांख्यिकी में सहसंबंध कहा जाता है। दूसरे शब्दों में, दो या दो से अधिक चरों के मध्य अन्तर्संबंध को सहसंबंध की संज्ञा दी जाती है। सहसंबंध के परिमाण को अंकों में व्यक्त किया जाता है, जिसे सहसंबंध गुणांक (Coefficient of Correlation) कहा जाता है। विभिन्न विद्वानों ने सहसंबंध की अनेक परिभाषाएँ दी हैं-

प्रो० किंग "यदि यह सत्य सिद्ध हो जाता है कि अधिकांश उदाहरणों में दो चर-मूल्य (Variables) सदैव एक ही दिशा में या परस्पर विपरीत दिशा में घटने-बढ़ने की प्रवृत्ति रखते हैं तो ऐसी स्थिति में यह समझा जाना चाहिए कि उनमें एक निश्चित संबंध है। इसी संबंध को सहसंबंध कहते हैं। (If it is proved true that in a large number of instances, two variables tend always to fluctuate in the same or in opposite direction, we consider that the fact is established and relationship exists. This relationship is called correlation)."

बाउले- " जब दो संख्याएँ इस प्रकार सम्बन्धित हों कि एक का परिवर्तन दूसरे के परिवर्तन की सहानुभूति में हो, जिसमें एक की कमी या वृद्धि, दूसरे की कमी या वृद्धि से संबंधित हो या विपरीत हो और एक में परिवर्तन की मात्रा दूसरे के परिवर्तन की मात्रा के समान हो, तो दोनों मात्राएँ सहसंबंध कहलाती हैं।" इस प्रकार सहसंबंध दो या दो से अधिक संबंधित चरों के बीच संबंध की सीमा के माप को कहते हैं।

4.4 सहसंबंध व कारण-कार्य संबंध (Causation and Correlation)

जब दो समक श्रेणियाँ एक दूसरे पर निर्भर/आश्रित हों तो इस पर निर्भरता को सहसंबंध के नाम से जाना जाता है। अतः एक समक श्रेणी में परिवर्तन कारण होता है तथा इसके परिणामस्वरूप दूसरी श्रेणी में होने वाला परिवर्तन प्रभाव या कार्य कहलाता है। कारण एक स्वतंत्र चर होता है तथा प्रभाव इस पर आश्रित है। कारणों में परिवर्तनों से प्रभाव परिवर्तित होता है न कि प्रभाव के परिवर्तन से कारण। सहसंबंध की गणना से पूर्व चरों की प्रकृति को अच्छी तरह समझना चाहिए अन्यथा गणितीय विधि से चरों के मध्य सहसंबंध की निकाली गयी मात्रा बहुत ही भ्रामक हो सकता है। गणितीय विधि से किसी भी दो या दो से अधिक चरों के मध्य सहसंबंध की मात्रा का परिकलन किया जा सकता है और इन चरों के मध्य कुछ न कुछ सहसंबंध की मात्रा भी हो सकती है, लेकिन इसका अर्थ यह कदापि नहीं लगाना चाहिए कि उन चरों के मध्य कारण-कार्य का संबंध विद्यमान है। प्रत्येक कारण-कार्य संबंध का अर्थ सहसंबंध होता है, लेकिन प्रत्येक सहसंबंध से कारण-कार्य संबंध को सुनिश्चित नहीं किया जा सकता है। उदाहरण के लिए यदि अभिप्रेरणा की मात्रा में परिवर्तन के फलस्वरूप अधिगम पर पढ़ने वाले प्रभाव के बीच सहसंबंध गुणांक का परिकलन किया जाता है तो निश्चित रूप से उस सहसंबंध गुणांक के आधार पर यह कहा जा सकता है कि इन दोनों चरों के मध्य कारण-कार्य संबंध है। लेकिन यदि भारत में पुस्तकों के मूल्यों में परिवर्तन का न्यूनार्क में सोने के मूल्यों में परिवर्तन के समकों से सहसंबंध गुणांक का परिकलन किया जाय तो इस गुणांक से प्राप्त परिणाम तर्कसंगत नहीं हो सकते, क्योंकि पुस्तकों के मूल्य व सोने के मूल्यों के मध्य कोई कारण-कार्य का संबंध सुनिश्चित नहीं किया जा सकता। अतः इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि प्रत्येक सहसंबंध गुणांक कारण-कार्य संबंध को सुनिश्चित नहीं करता।

4.5 सहसंबंध का महत्त्व

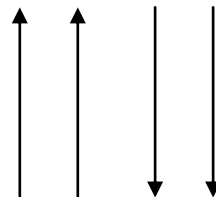
सहसंबंध का व्यावहारिक विज्ञान व भौतिक विज्ञान विषयों में बहुत महत्त्व है। इसे निम्न तरीके से समझा जा सकता है:-

- सहसंबंध के आधार पर दो संबंधित चर-मूल्यों में संबंध की जानकारी प्राप्त होती है।
- सहसंबंध विश्लेषण शोध कार्यों में सहायता प्रदान करता है।
- सहसंबंध के सिद्धान्त पर विचरण अनुपात (Ratio of Variation) तथा प्रतीपगमन (Regression) की धारणाएँ आधारित हैं, जिसकी सहायता से दूसरी श्रेणी के संभावित चर-मूल्यों का विश्वसनीय अनुमान लगाया जा सकता है।
- सहसंबंध का प्रभाव भविष्यवाणी की अनश्चितता के विस्तार को कम करता है।
- व्यावहारिक जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में दो या अधिक घटनाओं का तुलनात्मक अध्ययन करने एवं उनमें पारस्परिक संबंध का विवेचन करके पूर्वानुमान लगाने में सहसंबंध बहुत उपयोगी सिद्ध होता है।

4.6 सहसंबंध के प्रकार (Types of Correlation)

सहसंबंध को हम दिशा, अनुपात, तथा चर-मूल्यों की संख्या के आधार पर कई भागों में विभक्त कर सकते हैं।

- धनात्मक एवं ऋणात्मक सहसंबंध (Positive and Negative Correlation) :-**
यदि दो पद श्रेणियों या चरों में परिवर्तन एक ही दिशा में हो तो उसे धनात्मक सहसंबंध कहेंगे। जैसे- अधिगम की मात्रा में वृद्धि से शैक्षिक उपलब्धि का बढ़ना। इसके विपरीत यदि एक चर के मूल्यों में एक दिशा परिवर्तन होने से दूसरे चर के मूल्यों में विपरीत दिशा में परिवर्तन हो तो ऐसा सहसंबंध ऋणात्मक सहसंबंध कहलाएगा। इसके अन्तर्गत एक चर-मूल्य में वृद्धि तथा दूसरे चर-मूल्य में कमी होती है तथा एक के मूल्य घटने से दूसरे के मूल्य बढ़ने लगते हैं। धनात्मक एवं ऋणात्मक सहसंबंध को निम्न रेखाचित्र की मदद से समझा जा सकता है:-

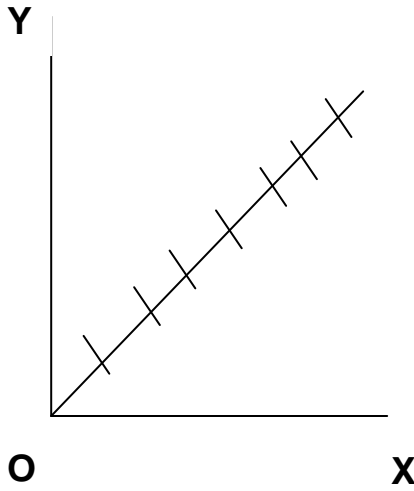


धनात्मक सहसंबंध

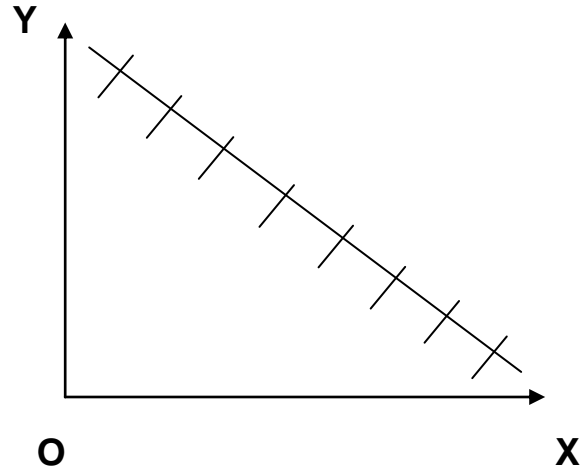


ऋणात्मक सहसंबंध

अग्रांकित रेखाचित्र में पूर्ण धनात्मक तथा पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध को प्रदर्शित किया गया है।

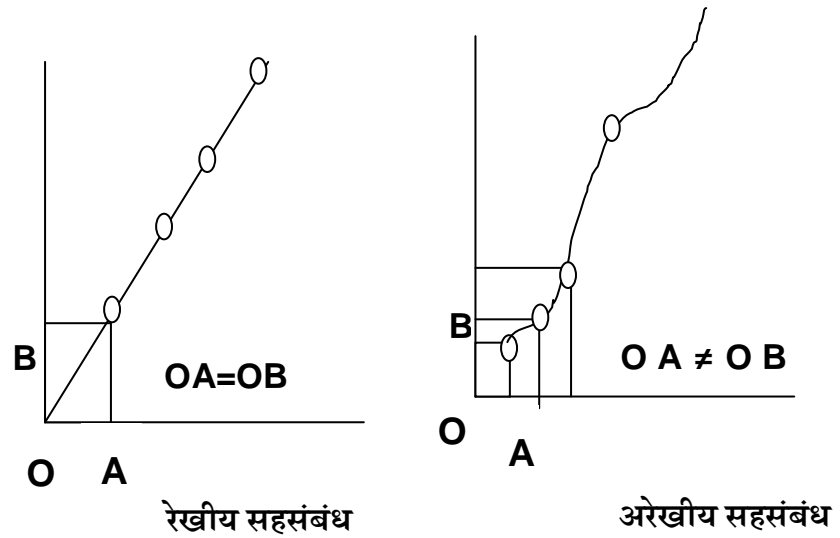


पूर्ण धनात्मक सह संबंध



पूर्ण ऋणात्मक सह संबंध

- ii. **रेखीय तथा अ-रेखीय सहसंबंध (Linear or Non-Linear Correlation):-**
परिवर्तन अनुपात की सममितता के आधार पर सहसंबंध रेखीय अथवा अ-रेखीय हो सकता है। रेखीय सहसंबंध में परिवर्तन का अनुपात स्थायी रूप से समान होता है अर्थात् यदि इन चर-मूल्यों को बिन्दु-रेखीय पत्र पर अंकित किया जाय तो वह रेखा एक सीधी रेखा के रूप में होगी जैसे- यदि छात्रावास से छात्रों की संख्या को दुगुनी कर दी जाय फलस्वरूप यदि खाद्यान्न की मात्रा भी दुगुनी दर से खपत हो तो इसे रेखीय सहसंबंध (Linear Correlation) कहेंगे। इसके विपरीत जब परिवर्तन का अनुपात स्थिर नहीं होता तो ऐसे सहसंबंध को अरेखीय सहसंबंध कहेंगे। जैसे- छात्रों की संख्या दुगुनी होने पर खाद्यान्नों की मात्रा का दुगुनी दर से खपत नहीं होना उससे अधिक या कम मात्रा में खपत होना, अर्थात् दोनों चरों के परिवर्तन के अनुपात में स्थायित्व का अभाव हो, ऐसी स्थिति को यदि बिन्दु रेखीय पत्र पर प्रदर्शित किया जाय तो यह रेखा, वक्र के रूप में बनेगी। रेखीय व अरेखीय सहसंबंधों को निम्न रेखाचित्रों के माध्यम से भलीभाँति समझा जा सकता है:-

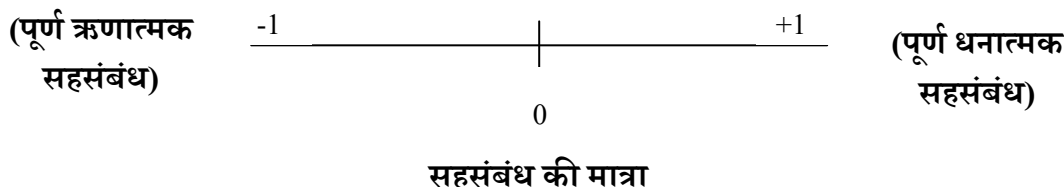


- iii. सरल, आंशिक तथा बहुगुणी सहसंबंध (Simple, Partial and Multiple Correlation):- दो चर मूल्यों (जिनमें एक स्वतंत्र तथा एक आश्रित हो) के आपसी सहसंबंध को सरल सहसंबंध कहते हैं। तीन अथवा अधिक चर-मूल्यों के मध्य पाये जाने वाला सहसंबंध आंशिक अथवा बहुगुणी हो सकता है। तीन चरों में से एक स्वतंत्र चर को स्थिर मानते हुए दूसरे स्वतंत्र चर मूल्य का आश्रित चर-मूल्य से सहसंबंध ज्ञात किया जाता है तो उसे आंशिक सहसंबंध कहेंगे। उदाहरणार्थ- यदि रूचि को स्थिर मानकर शैक्षिक उपलब्धि पर अभिक्षमता की मात्रा के प्रभाव का अध्ययन किया जाय तो यह आंशिक सहसंबंध कहलायेगा, जबकि बहुगुणी सहसंबंध के अन्तर्गत तीन या अधिक चर मूल्यों के मध्य सहसंबंध स्थापित किया जाता है। इसके अन्तर्गत दो या दो से अधिक स्वतंत्र चर-मूल्य होते हैं एवं एक आश्रित चर होता है। उदाहरणार्थ- यदि बुद्धि, रूचि दोनों का शैक्षिक उपलब्धि पर सामूहिक प्रभाव का अध्ययन किया जाय तो यह बहुगुणी सहसंबंध कहलायेगा।

4.7 सहसंबंध का परिमाण (Degree of Correlation)

सहसंबंध का परिकलन सहसंबंध गुणांक (Coefficient of Correlation) के रूप में किया जाता है। इसके आधार पर धनात्मक (Positive) एवं ऋणात्मक (Negative) सहसंबंध के निम्न परिमाण हो सकते हैं:-

- i. **पूर्ण धनात्मक अथवा पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध (Perfect Positive or Perfect Negative Correlation):-** जब दो पद श्रेणियों में परिवर्तन समान अनुपात एवं एक ही दिशा में हो तो उसे पूर्ण धनात्मक सहसंबंध कहेंगे। ऐसी स्थिति में सहसंबंध गुणांक (+1) होगा। इसके विपरीत जब दो मूल्यों में परिवर्तन समान अनुपात में ठीक विपरीत दिशा में हो तो उसे पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध कहेंगे। ऐसी स्थिति में सहसंबंध गुणांक (-1) होगा। सहसंबंध गुणांक का मूल्य हर दशा में 0 तथा ± 1 के मध्य होता है।



सहसंबंध गुणांक का मान व इसका अर्थापन

सहसंबंध परिमाण (Degree of Correlation)	धनात्मक सहसंबंध (Positive Correlation)	ऋणात्मक सहसंबंध (Negative Correlation)
पूर्ण (Perfect)	+1	-1
उच्च स्तरीय (High Degree)	+ .75 से +1 के बीच	-.75 से -1 के मध्य
मध्यम स्तरीय (Moderate Degree)	+ .25 से +.75 के बीच	-.25 से -.75 के मध्य
निम्न स्तरीय (Low Degree)	0 से +.25 के मध्य	0 से -.25
सहसंबंध का पूर्णतः अभाव (No Correlation)	0	0

4.8 सहसंबंध के रूप में r की विश्वसनीयता

सहसंबंध का सामान्य अर्थ है दो समक श्रेणियों में कारण और परिणाम के आधार पर परस्पर सहसंबंध पाया जाना। दोनों श्रेणियों में ज्ञात r का मान कभी-कभी भ्रामक परिणाम दे सकता है। सहसंबंध गुणांक के कम होने पर यह नहीं मान लेना चाहिए कि संबंध बिल्कुल नहीं है तथा इसके

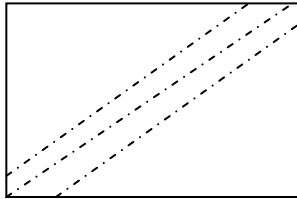
विपरीत सहसंबंध गुणांक का मान अधिक होने पर भी यह नहीं मान लेना चाहिए कि उन चरों के मध्य घनिष्ठ संबंध है। छोटे आकार के प्रतिदर्श में सहसंबंध केवल अवसर त्रुटि के कारण ही हो सकता है। अतः जहाँ तक संभव हो सके दोनों चरों में कारण व प्रभाव संबंध को ज्ञात किया जाय ताकि उसके संबंधों की पृष्ठभूमि की जानकारी प्राप्त हो जाय।

4.9 सरल सहसंबंध ज्ञात करने की विधियाँ (Methods of Determining Simple Correlation):-

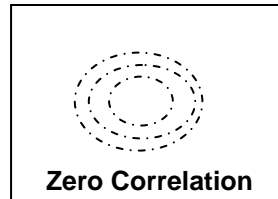
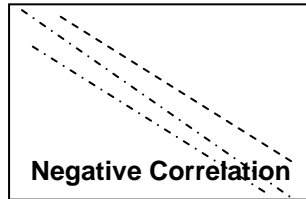
- i. बिन्दु रेखीय विधियाँ (Graphic Methods):-
 - i. विक्षेप चित्र (Scatter Diagram)
 - ii. साधारण बिन्दु रेखीय रीति (Simple graphic Method)
- ii. गणितीय विधियाँ (Mathematical Methods):-
 - i. कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक (Karl Pearson Coefficient of Correlation)
 - ii. स्पीयरमैन की श्रेणी अंतर विधि (Spearman's Rank Difference Method)
 - iii. संगामी विचलन गुणांक (Coefficient of Concurrent Deviations)
 - iv. न्यूनतम वर्ग रीति (Least Squares Method)
 - v. अन्य रीतियाँ (Other Methods)
- i. बिन्दुरेखीय विधियाँ (Graphic Methods) :-

विक्षेप चित्र (Scatter Diagram) : दो समकों के मध्य यह जानने के लिए कि वे एक दूसरे के संबंध में किस प्रकार गतिमान होते हैं, विक्षेप चित्र बनाये जाते हैं। इसमें दो चर जहाँ प्रथम स्वतंत्र चर जिसे भुजाक्ष (X-axis) पर तथा द्वितीय आश्रित चर जिसे कोटि-अक्ष Y पर प्रदर्शित कर X एवं Y श्रेणी के संबंधित दोनों मूल्यों के लिए एक ही बिन्दु अंकित किया जाता है। एक श्रेणी में जितने पद-युग्म (Pair-Values) होते हैं उतने ही बिन्दु अंकित कर दिये जाते हैं। विक्षेप चित्र को निम्न प्रकार समझा जा सकता है:-

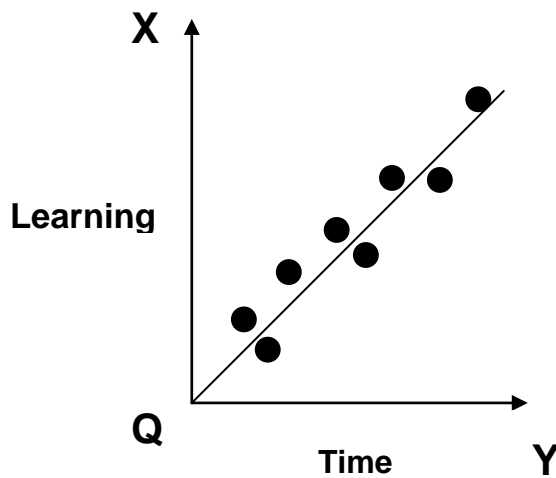
Positive Correlation



Different types of Scatter Diagram



- ii. **साधारण बिन्दु रेखीय विधि:-** यह बहुत ही सरल विधि है। इसके अन्तर्गत श्रेणियों (X एवं Y) को खड़ी रेखा पर तथा संख्या समय अथवा स्थान को पड़ी रेखा पर अंकित कर दोनों श्रेणियों में संबंध को आसानी से देखा जा सकता है।



- iii. **गणितीय विधियाँ (Mathematical Methods):-** गणितीय विधि के अन्तर्गत हम यहाँ कार्ल पियर्सन सहसंबंध गुणांक (Karl Pearson's Coefficient of Correlation) का अध्ययन करेंगे।

4.10 कार्ल पियर्सन सहसंबंध गुणांक:

सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने कि लिए यह विधि सर्वश्रेष्ठ समझी जाती है। इस विधि में सहसंबंध की दिशा तथा संख्यात्मक मात्रा का माप भी किया जाता है। यह सहसंबंध गुणांक **माध्य एवं प्रमाप विचलन** पर आधारित है। अतः इसमें गणितीय दृष्टि से पूर्ण शुद्धता पायी जाती है। इस रीति का प्रयोग सर्वप्रथम कार्ल पियर्सन ने 1890 में जीवशास्त्र की समस्याओं के अध्ययन में किया था। इस रीति के अन्तर्गत दो चरों के मध्य सहसंबंध गुणांक (Coefficient Correlation) ज्ञात करते हैं, जिसे संकेताक्षर 'r' से संबोधित किया जाता है। इस विधि की मुख्य विशेषताएँ निम्नवत हैं :-

1. इस विधि से सहसंबंध की दिशा का पता चलता है कि वह धनात्मक (+) है या ऋणात्मक (-)।
2. इस विधि के सहसंबंध गुणांक से मात्रा व सीमाओं (-1 से 0 से +1) का ज्ञान सरलता से हो जाता है।
3. इसमें श्रेणी के समस्त पदों को महत्त्व दिये जाने के कारण इसे सह-विचरण (Covariance) का एक अच्छा मापक माना जाता है।

$$\text{सूत्रानुसार (Covariance)} = \frac{\sum xy}{N} \quad \begin{array}{l} x = X - \bar{X} \\ y = Y - \bar{Y} \end{array}$$

4. सहसंबंध गुणांक चरों के मध्य सापेक्ष संबंध की माप हैं अतः इसमें इकाई नहीं होती।
5. सहसंबंध गुणांक पर मूल बिन्दु तथा पैमाने से परिवर्तन का कोई प्रभाव नहीं पड़ता।
6. सह-विचरण से कार्ल पियर्सन के सहसंबंध की गणना की जा सकती है।

$$\text{जैसे } r = \frac{\text{Covariance}}{\sqrt{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2}}$$

4.11 कार्ल पियर्सन के सहसंबंध गुणांक की गणना

कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम सह-विचरण (Covariance) ज्ञात करते हैं। इसे सहसंबंध गुणांक में परिवर्तन करने के लिए दोनों श्रेणियों के प्रमाप विचलनों के गुणनफल से भाग दे दिया जाता है। इस प्रकार प्राप्त परिणाम ही कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक कहलाता है।

$$\text{सूत्रानुसार:-} \quad r = \frac{\sum xy}{N\sigma_x\sigma_y}$$

व्यक्तिगत (Individual Series):- व्यक्तिगत श्रेणी में सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने की दो विधियाँ हैं:-

- i. **प्रत्यक्ष विधि (Direct Method):-** प्रत्यक्ष विधि से सहसंबंध गुणांक निम्न सूत्रों में से किसी एक के द्वारा ज्ञात किया जा सकता है:-

प्रथम सूत्र :-
$$r = \frac{\text{Covariance}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

द्वितीय सूत्र:-
$$\frac{\Sigma xy}{N \sigma_x \sigma_y}$$
 तृतीय सूत्र:-
$$r = \frac{\Sigma xy}{N \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N} \cdot \frac{\Sigma y^2}{N}}}$$

चतुर्थ सूत्र:-
$$\frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \cdot \Sigma y^2}}$$

r = सहसंबंध गुणांक

Σxy = दोनों श्रेणियों के माध्यों से विचलनों के गुणनफल का योग। Σx^2
= X श्रेणी के माध्य से विचलन वर्गों का योग।

Σy^2 = Y श्रेणी के माध्य से विचलन वर्गों का योग।

σ_x = X श्रेणी का प्रमाप विचलन σ_y = Y श्रेणी
का प्रमाप विचलन

N = पदों की संख्या

उपर्युक्त चारों ही सूत्र मूल रूप से एक ही हैं अतएवं किसी भी सूत्र से सहसंबंध गुणांक की गणना करने पर परिणाम एक ही होगा।

उदाहरण:- अग्र समकों के आधार पर प्रत्यक्ष रीति द्वारा कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक ज्ञात कीजिए।

X	10	20	30	40	50	60	70
Y	5	4	2	10	20	25	04

हल:- Calculation of the Coefficient of Correlation

X	$\bar{X} = 40$ से विचलन = x	विचलन का वर्ग x^2	Y	$\bar{Y} = 10$ से विचलन = y	y^2	xY
10	-30	900	05	-5	25	150
20	-20	400	04	-6	36	120
30	-10	100	02	-8	64	80
40	0	0	10	0	0	0
50	10	100	20	10	100	100
60	20	400	25	15	225	300
70	30	900	04	-06	36	-180
$\Sigma X = 280$ $N = 7$		$\Sigma x^2 = 2800$	$\Sigma Y = 70$ $N = 7$		$\Sigma y^2 = 616$	$\Sigma xy = 570$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{280}{7} = 40$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{70}{7} = 10$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}} = \sqrt{\frac{2800}{7}} = \sqrt{400} = 20$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{N}} = \sqrt{\frac{616}{7}} = 9.38$$

प्रथम सूत्र के अनुसार:- $r = \frac{\text{Co variance}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\Sigma xy / N}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{570 \div 7}{20 \times 9.38} = \frac{81.42}{187.6} = 0.434$

निष्कर्ष:- X तथा Y चरों में मध्यम स्तरीय धनात्मक सहसंबंध है।

ii. सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने की लघु रीति (short-cut method of calculating Coefficient of Correlation):- इस विधि में किसी भी पूर्णांक

मूल्य को कल्पित माध्य मानकर उससे प्रदत्त मूल्यों के विचलन (X- A_x =dx तथा Y - A_y) = dy) ज्ञात कर लेने चाहिए। तत्पश्चात् इन विचलनों के वर्ग (d^2x तथा d^2y) ज्ञात कर लेते हैं। अन्त में दोनों श्रेणियों के विचलनों का गुणनफल $d_x d_y$ ज्ञात कर लेते हैं। इन सभी मूल्यों का योग ज्ञात करने के पश्चात् निम्न मूल्य ज्ञात हो जाते हैं :-
 $N, \Sigma dx, \Sigma dy, \Sigma d^2x, \Sigma d^2y$, तथा $\Sigma dx dy$

इनके आधार पर अग्रलिखित में किसी एक सूत्र का प्रयोग करके सहसंबंध गुणांक ज्ञात किया जा सकता है।

प्रथम सूत्र :- $r = \frac{\Sigma dx dy - N(\bar{X} - A_x)(\bar{Y} - A_y)}{N\sigma_x\sigma_y}$

$\Sigma dx dy$ = कल्पित माध्यों से लिए गए विचलनों के गुणनफलों का योग

द्वितीय सूत्र:-

$$\frac{\Sigma dx dy - N \left[\frac{\Sigma dx}{N} \right] \left[\frac{\Sigma dy}{N} \right]}{N \sqrt{\frac{\Sigma d^2 x}{N} - \left[\frac{\Sigma dx}{N} \right]^2} \times \sqrt{\frac{\Sigma d^2 y}{N} - \left[\frac{\Sigma dy}{N} \right]^2}}$$

तृतीय सूत्र:- $= \frac{\Sigma dx dy \cdot N - (\Sigma dx)(\Sigma dy)}{\sqrt{\Sigma d^2 x \cdot N - (\Sigma dx)^2} \times \sqrt{\Sigma d^2 y \cdot N - (\Sigma dy)^2}}$

चतुर्थ सूत्र:- $r = \frac{\Sigma dx dy - \left(\frac{\Sigma dx \cdot \Sigma dy}{N} \right)}{\sqrt{\Sigma d^2 x - \frac{(\Sigma dx)^2}{N}} \sqrt{\Sigma d^2 y - \frac{(\Sigma dy)^2}{N}}}$

टिप्पणी:- उपर्युक्त चारों सूत्र एक ही सूत्र के विभिन्न रूप हैं। इनमें से किसी के भी प्रयोग द्वारा सह-संबंध गुणांक का उत्तर एक ही आता है। लेकिन सुविधा की दृष्टि से आपको तृतीय सूत्र का ही प्रयोग करना चाहिए।

उदाहरण:- निम्न समकों से सहसंबंध गुणांक का परिकलन कीजिए।

X	10	20	30	40	50	60	70
---	----	----	----	----	----	----	----

Y	2	4	8	5	10	15	14
---	---	---	---	---	----	----	----

हल:- सहसंबंध गुणांक का परिकलन (Calculation of the Coefficient of Correlation)

X	A=40 से विचलन (X-A)=dx	d ² _x	Y	A=5 से विचलन (X-5)=dy	d ² _y	dx dy
10	-30	900	2	-3	9	90
20	-20	400	4	-1	1	20
30	-10	100	8	3	9	-30
40	0	0	5	0	0	0
50	10	100	10	5	25	50
60	20	400	15	10	100	200
70	30	900	14	9	81	270
N=7	∑dx=0	∑d ² _x = 2800	N=7	∑dy=23	∑d ² _y = 325	∑dxdy=600

$$r = \frac{\sum dxdy \cdot N - (\sum dx)(\sum dy)}{\sqrt{\sum d^2x \cdot N - (\sum dx)^2} \sqrt{\sum d^2y \cdot N - (\sum dy)^2}}$$

$$= \frac{600 \times 7 - 0 \times 23}{\sqrt{2800 \times 7 - (0)^2} \sqrt{325 \times 7 - (23)^2}} = \frac{4200}{\sqrt{19600} \times \sqrt{325 \times 7 - (23)^2}}$$

$$= \frac{4200}{140 \times 41.785} = \frac{4200}{5849.923} = 0.717$$

अतः दोनों चरों में उच्च मध्य स्तरीय सहसंबंध है।

मूल बिन्दु तथा पैमाने में परिवर्तन का प्रभाव (Effect of Change in origin and scale):-

किसी श्रेणी के मूल बिन्दु में परिवर्तन का अर्थ है उस श्रेणी के सभी मूल्यों में एक निश्चित संख्या, स्थिरांक को घटाना तथा जोड़ना। इसी प्रकार किसी श्रेणी के पैमाने में परिवर्तन का अर्थ है उस श्रेणी के सभी मूल्यों में एक निश्चित संख्या का भाग देना अथवा गुणा करना। वास्तव में सहसंबंध गुणांक पर मूल बिन्दु तथा पैमाने में परिवर्तन का कोई प्रभाव नहीं पड़ता। दूसरे शब्दों में, यह मूल बिन्दु तथा पैमाने के प्रति स्वतंत्र है।

4.12 वर्गीकृत श्रेणी में सहसंबंध गुणांक (Coefficient of Correlation in Grouped Series)

वर्गीकृत श्रेणी में सहसंबंध गुणांक ज्ञात किया जा सकता है, लेकिन इसके लिए द्विचर सारणी का होना आवश्यक है। इसके अन्तर्गत दो परस्पर आवृत्ति बंटनों की कोष्ठक आवृत्तियों तथा कुल आवृत्तियों को इस प्रकार प्रस्तुत किया जाता है कि दोनों का अन्तर्संबंध स्पष्ट हो सके। वर्गीकृत सारणी में सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने के लिए अन्य प्रक्रिया अपनायी जाती है:-

- सतत् श्रेणी की स्थिति में X एवं Y श्रेणी के मध्य बिन्दु ज्ञात कर किसी भी कल्पित माध्य से विचलन ज्ञात किए जाते हैं। वर्गान्तर समान होने पर दोनों श्रेणियों में अथवा किसी भी एक श्रेणी में पद-विचलन लिए जा सकते हैं।
- विचलनों तथा आवृत्तियों का गुणा करके गुणनफल का योग ज्ञात कर लेते हैं, जोकि $\sum f dx$ तथा $\sum f dy$ होंगे।
- $f dx$ को dx से तथा $f dy$ को dy से गुणा करके $\sum f d^2 x$ तथा $\sum f d^2 y$ ज्ञात करते हैं।
- $f dx dy$ को ज्ञात करने हेतु प्रत्येक कोष्ठ आवृत्ति तथा dx और dy को आपस में गुणा करेंगे। $\sum f dx dy$ का योग दोनों ही तरफ समान होता है।

सूत्र में प्रयुक्त $\sum f dx dy$ की गणना निम्न प्रकार की जानी चाहिए:-

- कोष्ठ आवृत्ति को तालिका में छोटे खाने के नीचे दायीं ओर दिखाएँ।
- प्रत्येक कोष्ठ आवृत्ति से संबंधित ' dx ' तथा ' dy ' का गुणा करके कोष्ठ आवृत्ति वाले खाने के मध्य में स्थिर करें।
- इस प्रकार $dx dy$ का गुणा संबंधित कोष्ठ आवृत्ति से करके छोटे खाने में ऊपर बांयी ओर गहरे अक्षरों में अंकित करें। ऐसा इसलिये किया जाता है, जिससे कि $f dx dy$ का योग करते समय त्रुटि न हो।
- सभी वर्गों के समक्ष $f dx dy$ का योग करें।
- इस प्रकार $f dx dy$ का पुनः योग करने पर अभीष्ट $\sum f dx dy$ ज्ञात हो जाता है।

उदाहरण:- एक बुद्धि परीक्षण में 67 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों के समूह तथा आवृत्ति निम्नलिखित तालिका में दिये गये हैं। आयु तथा बुद्धि में संबंध के स्तर का माप कीजिए।

परीक्षण प्राप्तांक	उम्र (Age) in years				Total
	18	19	20	21	
200-250	4	4	2	1	11
250-300	3	5	4	2	14
300-350	2	6	8	5	21
350-400	1	4	6	10	21
Total	10	19	20	18	67

हल:- सहसंबंध गुणांक का परिकलन (Calculation of Coefficient of Correlation)

Age in years (X)	Mid Value (Y)		18	19	20	21	F	fdy	fd ² y	fdxdy
Test marks	dx → dy ↓		-1	0	+1	+2				
200-250	225	-1	4 1 4	0 0 4	-2 -1 2	-2 -2 1	11	-11	11	0
250-300	275	0	0 0 3	0 0 5	0 0 4	0 0 2	14	0	0	0
300-350	325	+1	-2 -1 2	0 0 6	8 1 8	10 2 5	21	21	21	16
350-400	375	+2	-2 -2 1	0 0 4	12 2 6	40 4 10	21	42	84	50
Total f			10	19	20	18	N=67	Σfdy 52	Σfd ² y =116	Σfdxdy
fdx			-10	0	20	36	Σfdx = 46			

fd^2x		10	0	20	72	Σfd^2x = 102			
$fdxd$ y		0	6	18	48	$\Sigma fdxdy$ = 66			

$$r = \frac{\Sigma fdxfdy \cdot N - (\Sigma fdx)(\Sigma fdy)}{\Sigma fd^2x \cdot N - (\Sigma fdx)^2 \times \sqrt{\Sigma fd^2y \cdot N - (\Sigma fdy)^2}} =$$

$$= \frac{66 \times 67 - 46 \times 52}{\sqrt{102 \times 67 - (46)^2} \sqrt{116 \times 67 - (57)^2}}$$

$$r = \frac{2030}{\sqrt{4718 \times 5068}}$$

$$= \frac{2030}{4889.87} r = 0.415$$

अतः आयु तथा बुद्धि में मध्यम स्तरीय धनात्मक सहसंबंध है।

संभाव्य विभ्रम (Probable Error) :- सहसंबंध गुणांक की विश्वसनीयता जाँच करने हेतु संभाव्य विभ्रम का प्रयोग किया जाता है। इस विभ्रम के दो मुख्य कार्य होते हैं:-

सीमा निर्धारण:- PE के आधार पर 'r' की दो सीमाएँ निर्धारित की जाती है, जिनके अन्तर्गत पूरे समग्र पर आधारित सहसंबंध गुणांक पाये जाने की 50 प्रतिशत संभावना रहती है। PE का सूत्र निम्न प्रकार है $PE = 0.6745 \frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$

प्रमाण विभ्रम (Standard Error):- वर्तमान सांख्यिकी में PE के आधार पर SE का प्रयोग अच्छा माना जाता है। सहसंबंध का SE सदैव से PE अधिक उपयुक्त समझा जाता है।

$$SE \text{ of } r = \frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$$

निश्चयन गुणांक (Coefficient of determination):- निश्चयन गुणांक का तात्पर्य है, आश्रित चर में होने वाले परिवर्तनों के लिए स्वतंत्र चर कितना उत्तरदायी है।

$$\text{Coefficient of determination } (r^2) = \frac{\text{Explained Variation}}{\text{Total Variation}}$$

निश्चयन गुणांक का वर्गमूल ही सहसंबंध गुणांक है। यदि $r = 0.07$ हो तो इसका निश्चयन गुणांक $(r)^2 = 0.43$ होगा। इसका तात्पर्य है कि आश्रित चर (Y चर) में होने वाले केवल मात्र 49 प्रतिशत परिवर्तन ही X के कारण हैं, जबकि $(100-49) = 51$ प्रतिशत परिणाम अस्पष्ट है।

अनिश्चयन गुणांक (Coefficient of Non-determination) :- अस्पष्टीकृत विचरणों को कुल विचरणों से भाग देने पर अनिश्चयन गुणांक की गणना की जा सकती है। कुल विचरण को 1 मानने पर 1 में से निश्चयन गुणांक को घटाने पर अनिश्चयन गुणांक ज्ञात किया जा सकता है।

$$\text{Coefficient of Non-determination } K^2 = \frac{\text{Unexplained Variation}}{\text{Total Variation}}$$

$$\text{अथवा } K^2 = 1-r^2$$

अभ्यास प्रश्न

1. यदि $r = 0.06$ हो तो इसका निश्चयन गुणांक..... होगा।
2.का तात्पर्य है, आश्रित चर में होने वाले परिवर्तनों के लिए स्वतंत्र चर कितना उत्तरदायी है।
3. कुल विचरण को 1 मानने पर 1 में से निश्चयन गुणांक को घटाने परज्ञात किया जा सकता है।
4.= $1-r^2$
5. SE of= $\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$
6. सहसंबंध गुणांक की विश्वसनीयता जाँच करने हेतुका प्रयोग किया जाता है।
7. तीन चरों में से एक स्वतंत्र चर को स्थिर मानते हुए दूसरे स्वतंत्र चर मूल्य का आश्रित चर-मूल्य से सहसंबंध ज्ञात किया जाता है तो उसेसहसंबंध कहते हैं।

8. जब दो पद श्रेणियों में परिवर्तन समान अनुपात एवं एक ही दिशा में हो तो उसेसहसंबंध कहते हैं।
9. यदि एक चर के मूल्यों में एक दिशा में परिवर्तन होने से दूसरे चर के मूल्यों में विपरीत दिशा में परिवर्तन हो तो ऐसा सहसंबंधकहलाता है।
10. जब दो चरों में परिवर्तन का अनुपात स्थिर नहीं होता तो ऐसे सहसंबंध कोसहसंबंध कहते हैं।

4.13 द्विपंक्तिक सहसंबंध (Bi-serial Correlation)

शिक्षा या मनोविज्ञान के क्षेत्र में, दो सहसंबंध चर अखण्डित या सतत् (Continuous) रूप से मापनीय होते हैं। अर्थात् दो अखण्डित चरों के मध्य सहसंबंध का परिकलन किया जाता है। लेकिन इस स्थिति के अलावा एक ऐसी स्थिति भी होती है जहाँ दो सहसंबंध चरों में से एक चर अखण्डित रूप से मापनीय होता है व दूसरा चर कृत्रिम रूप से द्विखण्डित किया जाता है। इस स्थिति में जब एक चर अखण्डित (Continuous) हो व दूसरे चर को कृत्रिम रूप से दो भागों में विभाजित किया गया हो तो इनके मध्य सहसंबंध को परिकलित करने के लिए हम द्विपंक्तिक सहसंबंध की विधि अपनाते हैं।

चरों का द्विविभाजन (Dichotomize) का अर्थ है उसे दो भागों में बाँटना या दो वर्गों में वर्गीकृत करना। इस तरह का विभाजन इस बात पर निर्भर करता है कि संग्रहित आंकड़ों की प्रकृति क्या है। उदाहरण के लिए यदि हमें यह अध्ययन करना है कि एक कक्षा में पास या फेल छात्रों की संख्या क्या है। इस अध्ययन के लिए सर्वप्रथम हमें पास या फेल की कसौटी निर्धारित करनी होती है। तत्पश्चात् उस कसौटी से प्रत्येक छात्र के शैक्षिक उपलब्धि की तुलना की जाती है तो यह पता चलता है कि कितने छात्र पास या फेल हैं। यहाँ पास या फेल, शैक्षिक उपलब्धि चर का कृत्रिम द्विविभाजन (Dichotomize) है। यह द्विभाजन प्राकृतिक नहीं है। शिक्षा या मनोविज्ञान के क्षेत्र में चरों का कृत्रिम द्विविभाजन अपनी सुविधा की दृष्टि से किया जाता है ताकि उन चरों को उपयुक्त सांख्यिकीय उपचारों द्वारा सही अर्थ दिया जा सके।

निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा चरों के कृत्रिम द्विविभाजन के अर्थ को समझा जा सकता है:-

1. उत्तीर्ण और अनुत्तीर्ण
2. समायोजित और कुसमायोजित
3. एथलेटिक और नॉन-एथलेटिक

द्विविभाजन: चरों को दो भागों में बाँटना

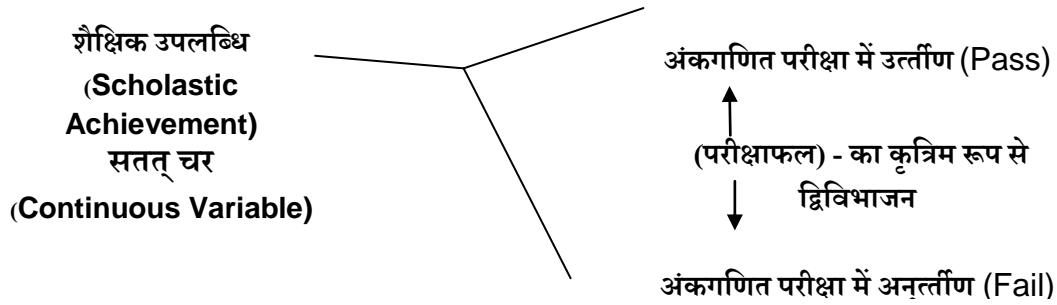
4. गरीब और अमीर
5. नैतिक और अनैतिक
6. सुन्दर और कुरूप
7. सफल और असफल
8. सामाजिक और असामाजिक
9. प्रगतिवादी और रूढ़िवादी

कृत्रिम द्विविभाजन: जब चरों को वर्गीकृत करने का आधार पूर्ण रूप से आत्मनिष्ठ या अप्राकृतिक हो

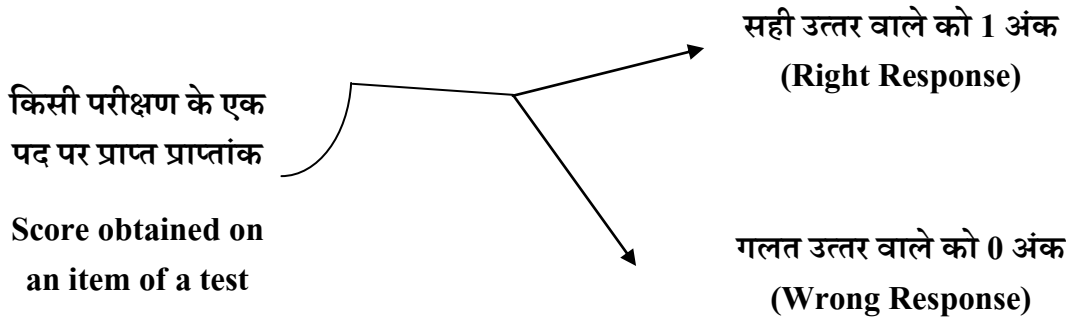
उपरोक्त उदाहरण में 'उत्तीर्ण और अनुत्तीर्ण' के रूप में परीक्षाफल रूपी चरों का द्विविभाजन पूर्ण रूप से कृत्रिम है। उत्तीर्ण या अनुत्तीर्ण निर्धारित करने की कसौटी पूर्ण रूप से परीक्षक अपने विवेक के आधार पर तय करता है। अतः यह कृत्रिम द्विविभाजन का उदाहरण है। इसी तरह अन्य उदाहरण भी कृत्रिम आधार पर ही द्विविभाजित हैं।

आपने उपरोक्त अनुच्छेद में चरों का कृत्रिम द्विविभाजन का अध्ययन किया है। कृत्रिम द्विविभाजन के अलावा चरों को प्राकृतिक कसौटी के आधार पर भी बाँटा जा सकता है। जैसे लिंग के आधार पर स्त्री व पुरुष का विभाजन, जीवित या मरा हुआ, पसन्द या नापसन्द, अपराधी या गैर-अपराधी, पी0एच0डी0 उपाधि धारक या गैर-पी0एच0डी0 उपाधि धारक इत्यादि।

अतः सतत् चर (Continuous Variable) और द्विविभाजन चर (a variable reduced to dichotomy) के मध्य जब उपयुक्त सहसंबंध गुणांक की प्रविधि का निर्धारण करना हो तो हमें सर्वप्रथम यह देख लेना चाहिए कि चरों के द्विविभाजन कृत्रिम या प्राकृतिक रूप से किया गया है। जब एक सतत् चर व तथा दूसरा कृत्रिम रूप से द्विभाजित चर के मध्य सहसंबंध निकाला जाता है, तो हम द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक प्रविधि का प्रयोग करते हैं। इसके विपरीत एक सतत् चर व प्राकृतिक रूप में द्विविभाजित चर के मध्य सहसंबंध निकालने के लिए हम बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध (Point Biserial Correlation) प्रविधि का प्रयोग करते हैं।



शैक्षिक उपलब्धि व परीक्षाफल के मध्य सहसंबंध द्विपंक्तिक सहसंबंध का उदाहरण है।



किसी पद पर प्राप्तांक व उत्तर की प्रकृति (Right/Wrong) के मध्य सहसंबंध, बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध (Point biserial Correlation) का उदाहरण है।

द्विपंक्तिक सहसंबंध की मान्यतायें (Assumptions of Biserial Correlation):-

- i. द्विभाजित चर में सततता (Continuity in the dichotomized trait)
- ii. द्विभाजित चरों के वितरण में प्रसामान्यता (Normality of the distribution underlying the dichotomy)
- iii. N का आकार बड़ा होना चाहिए (Large N)
- iv. मध्यिका (.50) के मध्य चर का द्विविभाजन (a split that is not too extreme- the closer to .50 the better)

सीमाएँ:-

- i. द्विपंक्तिक सहसंबंध को प्रतीपगमन विश्लेषण (Regression Analysis) करने में प्रयोग नहीं किया जा सकता।
- ii. इससे प्रमाप त्रुटि का आकलन नहीं किया जा सकता।
- iii. कार्ल पियर्सन के सहसंबंध गुणांक की सीमा (± 1.00) की तरह यह गुणांक ± 1.00 के मध्य सीमित नहीं होता।

4.14 बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध की मान्यताएँ (Assumptions of Point Biserial Correlation):

- i. द्विविभाजित चर में असततता (Discontinuity in the dichotomized trait)
- ii. द्विविभाजित चर के वितरण में अप्रसामान्यता (Lack of normality in the distribution underlying the dichotomy)
- iii. चरों का विभाजन का आधार प्राकृतिक होना चाहिए (Natural or genuine dichotomy of variable)
- iv. N का आकार बड़ा होना चाहिए।

4.15 द्विपंक्तिक सहसंबंध व बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध के मध्य तुलना (Comparison between Bi-serial 'r' and Point-biserial r):

Biserial (r_{bis})	Point Biserial (r_{pbis})
1. r_{pbis} की तुलना में यह सांख्यिकी निर्भरयोग्य नहीं है।	1. r_{pbis} निर्भरयोग्य सांख्यिकी है।
2. चरों के द्विविभाजन का वितरण प्रसामान्य होना चाहिए।	2. चरों के द्विविभाजन के वितरण के संबंध में कोई अवधारणा नहीं रखता।
3. इसका प्रसार ± 1.00 से अधिक भी हो सकता है।	3. इसका प्रसार ± 1.00 होता है।
4. इसका प्रमाप त्रुटि नहीं निकाला जा सकता।	4. इसका प्रमाप त्रुटि-आसानी से निकाला जा सकता है।
5. इसका प्रयोग प्रतीपगमन विश्लेषण में नहीं	5. इसका प्रयोग प्रतीपगमन विश्लेषण (Regression Analysis) में किया जा सकता है।

किया जा सकता।	6. r_{pbis} का मान r_{bis} के मान से हमेशा कम होता है।
6. r_{bis} का मान r_{pbis} के मान से हमेशा अधिक होता है।	7. r_{pbis} के मान को 'r' के मान से प्रतिजाँच (Cross Check) किया जा सकता।
7. r_{bis} के मान को 'r' के मान से प्रतिजाँच नहीं किया जा सकता।	8. इसका प्रयोग प्रायः किसी परीक्षण के प्रमाणीकरण में पद-विश्लेषण (Item analysis) के रूप में किया जाता है।
8. इसका प्रयोग Item analysis में नहीं किया जा सकता।	9. r_{bis} , 'r' का ही एक रूप है।
9. r_{bis} , 'r' से भिन्न है।	

द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक परिकलन का सूत्र (Formula to calculate the coefficient of Biserial Correlation):-

$$r_{bis} = \frac{M_p - M_q}{\sigma} \times \frac{Pq}{u}$$

(biserial Coefficient of Correlation or biserial r)

M_p = उच्च वर्ग (उत्तीर्ण) का माध्य (Mean)

M_q = निम्न वर्ग (अनुत्तीर्ण) का माध्य (Mean)

σ = सम्पूर्ण वर्ग का प्रमाप विचलन (S.D.)

p = उच्च वर्ग का कुल वर्ग के साथ अनुपात (Proportion)

q = निम्न वर्ग का कुल वर्ग के साथ अनुपात (Proportion), ($q=1-P$)

u = p और q के विभाजन बिन्दु पर प्रसामान्य वक्र की ऊँचाई

द्विपंक्तिक सहसंबंध (r_{bis}) परिकलन का वैकल्पिक सूत्र:

$$r_{bis} = \frac{M_p - M_T}{\sigma} \times \frac{P}{u}$$

M_T = कुल वर्ग का माध्य

r_{bis} को प्रमाप त्रुटि (Standard Error) परिकलन का सूत्र:

$$\frac{\frac{\sqrt{pq}}{u} - r^2_{bis}}{\sqrt{N}}$$

जब P और q का मान बहुत छोटा न हो, और N बहुत बड़ा हो।

बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध (r_{pbis}) परिकलन का सूत्र (Formula to Calculate Coefficient of Point -biserial Correlation):

$$r_{pbis} = \frac{M_p - M_q}{\sigma} \times \sqrt{pq}$$

M_p और M_q = दो वर्गों का क्रमशः माध्य

P = प्रथम वर्ग का अनुपात q = द्वितीय वर्ग का अनुपात

σ = कुल वर्ग का प्रमाप विचलन

r_{pbis} के प्रमाप त्रुटि परिकलन का सूत्र:

$$\sigma_{r_{pbis}} = \frac{(1 - r^2_{pbis})}{\sqrt{N}}$$

उदाहरण:- निम्न तालिका में दो समूहों के छात्रों द्वारा (क्रमशः उत्तीर्ण व अनुत्तीर्ण) गणित विषय के उपलब्धि प्राप्तांक का, वितरण दिखाया गया है। निम्न प्राप्तांक से द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक (Coefficient of Biserial Correlation) की गणना कीजिए।

गणित उपलब्धि परीक्षण का प्राप्तांक	गणित उपलब्धि परीक्षण का परीक्षाफल	
	उत्तीर्ण (f_p)	अनुत्तीर्ण (f_q)
5-10	0	5
10-15	3	5
15-20	10	13
20-25	15	26
25-30	24	40
30-35	35	15
35-40	10	6
40-45	16	0

45-50	7	0
Total	120	110 230

हल:- द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक का सूत्र :-

$$rbis = \frac{M_p - M_q}{\sigma} \times \frac{pq}{u}$$

$rbis$ का परिकलन के लिये आपको निम्न पदों का अनुसरण करना चाहिए:

प्रथम सोपान:- $p =$ उच्च वर्ग का अनुपात \Rightarrow उत्तीर्ण छात्रों की संख्या

कुल छात्र

$$\Rightarrow \frac{120}{120+110} = \frac{120}{230} = .52$$

द्वितीय सोपान:- $q = 1 - p = 1 - .52 = .48$

तृतीय सोपान:- $u = p$ और q के विभाजन बिन्दु पर प्रसामान्य वक्र की ऊँचाई
 $= .3989$ (यह मान प्रसामान्य वक्र से संबंधित तालिका से लिया गया है)

चतुर्थ सोपान:-

$$M_p = \frac{\sum xf_p}{\sum f_p} = \frac{3736}{120} = 31.13$$

$$M_q = \frac{\sum xfq}{\sum fq} = \frac{2725}{110} = 24.77$$

$$\sigma = \text{कुल प्राप्तांक का प्रमाप विचलन} = 8.41$$

चतुर्थ सोपान:-

सभी चरों का मान सूत्र में रखने पर

$$\begin{aligned} r_{bis} &= \frac{M_p - M_q}{\sigma_t} \times \frac{pq}{u} \\ &= \frac{31.13 - 24.77}{8.41} \times \frac{.52 \times .48}{0.3984} \\ &= \frac{6.36}{8.41} \times \frac{0.2496}{0.3984} \end{aligned}$$

$$= 0.75624257 \times 0.62650602$$

$$= 0.47$$

इस प्रकार, द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक का मान 0.47 है।

उदाहरण:- एक भाषा परीक्षण को 15 छात्रों पर प्रशासित किया गया। परीक्षण के पद नं० 10 तथा उस परीक्षण का कुल प्राप्तांक निम्न प्रकार से है (उत्तीर्ण के लिये 01 व अनुत्तीर्ण के लिये 0)। बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक से आप यह पता कीजिए कि उस परीक्षण का पद नं० 10, कुल परीक्षण से सहसंबंधित है अथवा नहीं।

छात्र	परीक्षण पर कुल प्राप्तांक	पद नं० 10 पर प्राप्तांक
-------	---------------------------	-------------------------

1	25	1
2	23	1
3	18	0
4	24	0
5	23	1
6	20	0
7	19	0
8	22	1
9	21	1
10	23	1
11	21	0
12	20	0
13	21	1
14	21	1
15	22	1
कुल योग	323	09

उत्तीर्ण छात्रों की संख्या = 9

उत्तीर्ण छात्रों का अनुपात (P) = $\frac{9}{15} = .60$

अनुत्तीर्ण छात्रों की संख्या = 6

अनुत्तीर्ण छात्रों का अनुपात (Q) = $1 - .60 = .40$

$$M_p = \frac{25 + 23 + 23 + 22 + 21 + 23 + 21 + 21 + 22}{9} = \frac{201}{9} = 22.33$$

$$M_q = \frac{18 + 24 + 20 + 19 + 21 + 20}{6} = \frac{122}{6} = 20.33$$

$$\sigma_T = 1.82 \quad r_{pbis} = \frac{M_p - M_q}{\sigma} X \sqrt{pq} = \frac{22.33 - 20.33}{1.82} X \sqrt{.60 X .40}$$

$$= .54$$

इस बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक के मान से यह पता चलता है पद नं0 10 कुल परीक्षण से सार्थक रूप से सहसंबंधित है। यह पद एक अच्छा पद है जिसे परीक्षण में रखा जा सकता है।

अभ्यास प्रश्न

11.का प्रसार ± 1.00 से अधिक भी हो सकता है।
12. चरों को दो स्वाभाविक भागों में बँटने की प्रक्रिया को कहते हैं।
13. जब एक चर अखण्डित (Continuous) हो व दूसरे चर को कृत्रिम रूप से दो भागों में विभाजित किया गया हो तो इनके मध्य सहसंबंध को हम कहते हैं।
14. एक सतत् चर व प्राकृतिक रूप में द्विविभाजित चर के मध्य सहसंबंध को कहते हैं।
15.सहसंबंध गुणांक **माध्य एवं प्रमाप विचलन** पर आधारित है।
16. r_{pbis} का मान r_{bis} के मान से हमेशा होता है।
17.का प्रयोग प्रायः किसी परीक्षण के प्रमाणीकरण में पद-विश्लेषण (Item analysis) के रूप में किया जाता है।
18.सहसंबंध को प्रतीपगमन विश्लेषण (Regression Analysis) करने में प्रयोग नहीं किया जा सकता।
19. उत्तीर्ण और अनुत्तीर्णविभाजन का उदाहरण है।
20. पुरुष और नारी विभाजन का उदाहरण है।

4.16 सारांश

इस इकाई में आपने सहसंबंध का अर्थ, परिभाषा, प्रकृति व इसके मापने के कार्ल पियर्सन, द्विपंक्तिक तथा बिंदु- द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांकों का अध्ययन किया। इन सभी अवधारणाओं का संक्षिप्त विवरण यहाँ दिया जा रहा है।

दो या दो से अधिक चरों के मध्य अन्तर्संबंध को सहसंबंध की संज्ञा दी जाती है। सहसंबंध के परिमाप को अंकों में व्यक्त किया जाता है, जिसे सहसंबंध गुणांक (Coefficient of Correlation) कहा जाता है।

गणितीय विधि से किसी भी दो या दो से अधिक चरों के मध्य सहसंबंध की मात्रा का परिकलन किया जा सकता है और इन चरों के मध्य कुछ न कुछ सहसंबंध की मात्रा भी हो सकती है, लेकिन इसका अर्थ यह कदापि नहीं लगाना चाहिए कि उन चरों के मध्य कारण- कार्य का संबंध विद्यमान

है। प्रत्येक कारण-कार्य संबंध का अर्थ सहसंबंध होता है, लेकिन प्रत्येक सहसंबंध से कारण-कार्य संबंध को सुनिश्चित नहीं किया जा सकता है।

सहसंबंध को हम दिशा, अनुपात, तथा चर-मूल्यों की संख्या के आधार पर कई भागों में विभक्त कर सकते हैं।

धनात्मक एवं ऋणात्मक सहसंबंध (Positive and Negative Correlation) :- यदि दो पद श्रेणियों या चरों में परिवर्तन एक ही दिशा में हो तो उसे धनात्मक सहसंबंध कहेंगे। इसके विपरीत यदि एक चर के मूल्यों में एक दिशा परिवर्तन होने से दूसरे चर के मूल्यों में विपरीत दिशा में परिवर्तन हो तो ऐसा सहसंबंध ऋणात्मक सहसंबंध कहलाएगा।

रेखीय तथा अ-रेखीय सहसंबंध (Linear or Non-Linear Correlation):- परिवर्तन अनुपात की सममितता के आधार पर सहसंबंध रेखीय अथवा अ-रेखीय हो सकता है। रेखीय सहसंबंध में परिवर्तन का अनुपात स्थायी रूप से समान होता है अर्थात् यदि इन चर-मूल्यों को बिन्दु-रेखीय पत्र पर अंकित किया जाय तो वह रेखा एक सीधी रेखा के रूप में होगी। इसके विपरीत जब परिवर्तन का अनुपात स्थिर नहीं होता तो ऐसे सहसंबंध को अरेखीय सहसंबंध कहेंगे।

सरल, आंशिक तथा बहुगुणी सहसंबंध (Simple, Partial and Multiple Correlation):- दो चर मूल्यों (जिनमें एक स्वतंत्र तथा एक आश्रित हो) के आपसी सहसंबंध को सरल सहसंबंध कहते हैं। तीन अथवा अधिक चर-मूल्यों के मध्य पाये जाने वाला सहसंबंध आंशिक अथवा बहुगुणी हो सकता है। तीन चरों में से एक स्वतंत्र चर को स्थिर मानते हुए दूसरे स्वतंत्र चर मूल्य का आश्रित चर-मूल्य से सहसंबंध ज्ञात किया जाता है तो उसे आंशिक सहसंबंध कहेंगे। जबकि बहुगुणी सहसंबंध के अन्तर्गत तीन या अधिक चर मूल्यों के मध्य सहसंबंध स्थापित किया जाता है।

पूर्ण धनात्मक अथवा पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध (Perfect Positive or Perfect Negative Correlation):- जब दो पद श्रेणियों में परिवर्तन समान अनुपात एवं एक ही दिशा में हो तो उसे पूर्ण धनात्मक सहसंबंध कहेंगे। ऐसी स्थिति में सहसंबंध गुणांक (+1) होगा। इसके विपरीत जब दो मूल्यों में परिवर्तन समान अनुपात में ठीक विपरीत दिशा में हो तो उसे पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध कहेंगे। ऐसी स्थिति में सहसंबंध गुणांक (-1) होगा। सहसंबंध गुणांक का मूल्य हर दशा में 0 तथा ± 1 के मध्य होता है।

सरल सहसंबंध ज्ञात करने की निम्न विधियाँ हैं -

iii. बिन्दु रेखीय विधियाँ (Graphic Methods):-

- iii. विक्षेप चित्र (Scatter Diagram)
- iv. साधारण बिन्दु रेखीय रीति (Simple graphic Method)
- iv. गणितीय विधियाँ (Mathematical Methods):-
 - vi. कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक (Karl Pearson Coefficient of Correlation)
 - vii. स्पीयरमैन की श्रेणी अंतर विधि (Spearman's Rank Difference Method)
 - viii. संगामी विचलन गुणांक (Coefficient of Concurrent Deviations)
 - ix. न्यूनतम वर्ग रीति (Least Squares Method)
 - x. अन्य रीतियाँ (Other Methods)

कार्ल पियर्सन सहसंबंध गुणांक: सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने कि लिए यह विधि सर्वश्रेष्ठ समझी जाती है। इस विधि में सहसंबंध की दिशा तथा संख्यात्मक मात्रा का माप भी किया जाता है। यह सहसंबंध गुणांक **माध्य एवं प्रमाप विचलन** पर आधारित है। अतः इसमें गणितीय दृष्टि से पूर्ण शुद्धता पायी जाती है। इस रीति के अन्तर्गत दो चरों के मध्य सहसंबंध गुणांक (Coefficient Correlation) ज्ञात करते हैं, जिसे संकेताक्षर 'r' से संबोधित किया जाता है।

वास्तव में सहसंबंध गुणांक पर मूल बिन्दु तथा पैमाने में परिवर्तन का कोई प्रभाव नहीं पड़ता। दूसरे शब्दों में, यह मूल बिन्दु तथा पैमाने के प्रति स्वतंत्र है।

संभाव्य विभ्रम (Probable Error) :- सहसंबंध गुणांक की विश्वसनीयता जाँच करने हेतु संभाव्य विभ्रम का प्रयोग किया जाता है।

प्रमाप विभ्रम (Standard Error):- वर्तमान सांख्यिकी में PE के आधार पर SE का प्रयोग अच्छा माना जाता है। सहसंबंध का SE सदैव से PE अधिक उपयुक्त समझा जाता है। SE of r =

$$\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$$

निश्चयन गुणांक (Coefficient of determination):- निश्चयन गुणांक का तात्पर्य है, आश्रित चर में होने वाले परिवर्तनों के लिए स्वतंत्र चर कितना उत्तरदायी है। निश्चयन गुणांक का वर्गमूल ही सहसंबंध गुणांक है।

अनिश्चयन गुणांक (Coefficient of Non-determination) :- अस्पष्टीकृत विचरणों को कुल विचरणों से भाग देने पर अनिश्चयन गुणांक की गणना की जा सकती है। कुल विचरण को 1

मानने पर 1 में से निश्चयन गुणांक को घटाने पर अनिश्चयन गुणांक ज्ञात किया जा सकता है। $K^2 = 1 - r^2$

जहाँ दो सहसंबंध चरों में से एक चर अखण्डित रूप से मापनीय होता है व दूसरा चर कृत्रिम रूप से द्विखण्डित किया जाता है। इस स्थिति में जब एक चर अखण्डित (Continuous) हो व दूसरे चर को कृत्रिम रूप से दो भागों में विभाजित किया गया हो तो इनके मध्य सहसंबंध को परिकलित करने के लिए हम द्विपंक्तिक सहसंबंध की विधि अपनाते हैं। इसके विपरीत एक सतत् चर व प्राकृतिक रूप में द्विविभाजित चर के मध्य सहसंबंध निकालने के लिए हम बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध (Point Biserial Correlation) प्रविधि का प्रयोग करते हैं।

4.17 शब्दावली

1. **सहसंबंध (Correlation):** दो या दो से अधिक चरों के मध्य अन्तर्संबंध को सहसंबंध की संज्ञा दी जाती है।
2. **सहसंबंध गुणांक (Coefficient of Correlation):** सहसंबंध के परिमाण को अंकों में व्यक्त किया जाता है, जिसे सहसंबंध गुणांक (Coefficient of Correlation) कहा जाता है।
3. **धनात्मक सहसंबंध (Positive Correlation):** यदि दो पद श्रेणियों या चरों में परिवर्तन एक ही दिशा में हो तो उसे धनात्मक सहसंबंध कहते हैं।
4. **ऋणात्मक सहसंबंध (Negative Correlation):** यदि एक चर के मूल्यों में एक दिशा में परिवर्तन होने से दूसरे चर के मूल्यों में विपरीत दिशा में परिवर्तन हो तो ऐसा सहसंबंध ऋणात्मक सहसंबंध कहलाता है।
5. **रेखीय सहसंबंध (Linear Correlation):** रेखीय सहसंबंध के अन्तर्गत दो चरों में परिवर्तन का अनुपात स्थायी रूप से समान होता है अर्थात् यदि चर-मूल्यों को बिन्दु-रेखीय पत्र पर अंकित किया जाय तो वह रेखा एक सीधी रेखा के रूप में होती है।
6. **अ-रेखीय सहसंबंध (Non-Linear Correlation):** जब दो चरों में परिवर्तन का अनुपात स्थिर नहीं होता तो ऐसे सहसंबंध को अरेखीय सहसंबंध कहते हैं।
7. **सरल सहसंबंध (Simple Correlation):** दो चर मूल्यों (जिनमें एक स्वतंत्र तथा एक आश्रित हो) के आपसी सहसंबंध को सरल सहसंबंध कहते हैं।
8. **आंशिक सहसंबंध (Partial Correlation):** तीन चरों में से एक स्वतंत्र चर को स्थिर मानते हुए दूसरे स्वतंत्र चर मूल्य का आश्रित चर-मूल्य से सहसंबंध ज्ञात किया जाता है तो उसे आंशिक सहसंबंध कहते हैं।

9. **बहुगुणी सहसंबंध (Multiple Correlation):** तीन या अधिक चर मूल्यों के मध्य सहसंबंध को बहुगुणी सहसंबंध कहते हैं।
10. **पूर्ण धनात्मक सहसंबंध (Perfect Positive Correlation):** जब दो पद श्रेणियों में परिवर्तन समान अनुपात एवं एक ही दिशा में हो तो उसे पूर्ण धनात्मक सहसंबंध कहते हैं। ऐसी स्थिति में सहसंबंध गुणांक (+1) होता है।
11. **पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध (Perfect Negative Correlation):** जब दो मूल्यों में परिवर्तन समान अनुपात में ठीक विपरीत दिशा में हो तो उसे पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध कहेंगे। ऐसी स्थिति में सहसंबंध गुणांक (-1) होता है।
12. **कार्ल पियर्सन सहसंबंध गुणांक:** यह सहसंबंध गुणांक **माध्य एवं प्रमाप विचलन** पर आधारित है। इस रीति के अन्तर्गत दो चरों के मध्य सहसंबंध गुणांक (Coefficient Correlation) ज्ञात करते हैं, जिसे संकेताक्षर 'r' से संबोधित किया जाता है।
13. **संभाव्य विभ्रम (Probable Error) :-** सहसंबंध गुणांक की विश्वसनीयता जाँच करने हेतु संभाव्य विभ्रम का प्रयोग किया जाता है।
14. **प्रमाप विभ्रम (Standard Error):** सहसंबंध गुणांक की विश्वसनीयता जाँच करने हेतु प्रमाप विभ्रम का प्रयोग किया जाता है। $SE \text{ of } r = \frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$
15. **निश्चयन गुणांक (Coefficient of determination):-** निश्चयन गुणांक का तात्पर्य है, आश्रित चर में होने वाले परिवर्तनों के लिए स्वतंत्र चर कितना उत्तरदायी है। निश्चयन गुणांक का वर्गमूल ही सहसंबंध गुणांक है।
16. **अनिश्चयन गुणांक (Coefficient of Non-determination) :-** अस्पष्टीकृत विचरणों को कुल विचरणों से भाग देने पर अनिश्चयन गुणांक की गणना की जा सकती है। कुल विचरण को 1 मानने पर 1 में से निश्चयन गुणांक को घटाने पर अनिश्चयन गुणांक ज्ञात किया जा सकता है। $K^2 = 1-r^2$
17. **प्राकृतिक द्विविभाजन (Natural Dichotomy):** चरों को दो स्वाभाविक भागों में बाँटना।
18. **कृत्रिम द्विविभाजन (Artificial Dichotomy):** जब चरों को वर्गीकृत करने का आधार पूर्ण रूप से आत्मनिष्ठ या अप्राकृतिक हो।
19. **द्विपंक्तिक सहसंबंध (Biserial Correlation):** जब एक चर अखण्डित (Continuous) हो व दूसरे चर को कृत्रिम रूप से दो भागों में विभाजित किया गया हो तो इनके मध्य सहसंबंध को हम द्विपंक्तिक सहसंबंध कहते हैं।

-
20. बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध (Point-biserial Correlation): एक सतत् चर व प्राकृतिक रूप में द्विविभाजित चर के मध्य सहसंबंध को बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध (Point-biserial Correlation) कहते हैं।
-

4.18 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर

1. $(r)^2 = 0.36$
2. निश्चयन गुणांक
3. अनिश्चयन गुणांक
4. K^2
5. r
6. प्रमाप विभ्रम
7. आंशिक
8. पूर्ण धनात्मक
9. ऋणात्मक सहसंबंध
10. अरेखीय
11. द्विपंक्तिक सहसंबंध
12. प्राकृतिक द्विविभाजन
13. द्विपंक्तिक सहसंबंध
14. बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध (Point-biserial Correlation)
15. कार्ल पियर्सन
16. कम
17. बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध
18. द्विपंक्तिक
19. कृत्रिम द्विविभाजन
20. प्राकृतिक द्विविभाजन

4.19 संदर्भ ग्रन्थ सूची/ पाठ्य सामग्री (References/ Useful Readings)

1. Koul, Lokesh (2002). Methodology of Educational Research New Delhi, Vikas Publishing Pvt. Ltd.
2. Karlinger, Fred N. (2002). Foundations of Behavioural Research, New Delhi, Surjeet Publications.
3. Garret, H.E. (1972). Statistics in Psychology and Education, New York, Vakils, Feffers and Simans Pvt. Ltd.
4. सिंह, ए०के० (2007) : मनोविज्ञान, समाजशास्त्र तथा शिक्षा में शोध विधियाँ, नई दिल्ली, मोतीलाल बनारसी दास
5. गुप्ता, एस०पी० (2008) : मापन एवं मूल्यांकन, इलाहाबाद, शारदा पब्लिकेशन
6. राय, पारसनाथ (2001) : अनुसंधान परिचय, आगरा, लक्ष्मी नारायण अग्रवाल पब्लिकेशन्स
7. Best, John W. & Kahn (2008). Research in Education, New Delhi, PHI.
8. Good, Carter, V. (1963). Introduction to Educational Research, New York, Rand Mc Nally and company.

4.20 निबंधात्मक प्रश्न

1. सहसंबंध का अर्थ बताइये व इसके विभिन्न प्रकारों को स्पष्ट कीजिये।
2. सहसंबंध के विभिन्न मापकों का परिकलन कर सकेंगे।
3. सहसंबंध के विभिन्न मापकों की तुलना कर सकेंगे।
4. सहसंबंध गुणांक का अर्थापन कर सकेंगे।
5. निम्न आंकड़े से कार्ल पियर्सन के सहसंबंध गुणांक की गणना कीजिये। (उत्तर: $r = 0.69$)

छात्र	प्रथम परीक्षण में प्राप्त अंक	द्वितीय परीक्षण में प्राप्त अंक
A	8	6
B	6	5
C	5	4
D	5	3
E	7	2
F	8	7

G	3	2
H	6	3

- द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक व बिंदु द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक के मध्य अंतर स्पष्ट कीजिए।
- निम्न तालिका में दो समूहों के छात्रों द्वारा (क्रमशः दार्शनिक व गैर दार्शनिक) गणित विषय के उपलब्धि प्राप्तांक का, वितरण दिखाया गया है। निम्न प्राप्तांक से द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक (Coefficient of Biserial Correlation) की गणना कीजिए। (उत्तर =0.41)

गणित उपलब्धि परीक्षण का प्राप्तांक	गणित उपलब्धि परीक्षण का परीक्षाफल	
	दार्शनिक (f _p)	गैर दार्शनिक (f _q)
85-89	5	6
80-84	2	16
75-79	6	19
70-74	6	27
65-69	1	19
60-64	0	21
55-59	1	16
Total	21	124 145

- एक परीक्षण को 11 छात्रों पर प्रशासित किया गया। परीक्षण के पद नं० 07 तथा उस परीक्षण का कुल प्राप्तांक निम्न प्रकार से है (उत्तीर्ण के लिये 01 व अनुत्तीर्ण के लिये 0)। बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक से आप यह पता कीजिए कि उस परीक्षण का पद नं० 07, कुल परीक्षण से सहसंबंधित है अथवा नहीं। (उत्तर =0.36)

छात्र	परीक्षण पर कुल प्राप्तांक	पद नं० 07 पर प्राप्तांक
1	15	1
2	14	1
3	13	0
4	15	0
5	10	1
6	15	0
7	13	0
8	12	1
9	15	1

मापन एवं मूल्यांकन Measurement & Evaluation MAED 607 Semester III

10	10	1
11	11	0
कुल योग	143	06

इकाई 5 मनोवैज्ञानिक परीक्षण : प्रक्रिया, उपयोग तथा परीक्षण प्राप्तांकों का निर्वचन Psychological Testing : Procedures, Uses and Interpretations of Test Scores

- 5.1 प्रस्तावना
- 5.2 उद्देश्य
- 5.3 मनोवैज्ञानिक परीक्षण का अर्थ उसकी संकल्पना एवं परिभाषा
- 5.4 मनोवैज्ञानिक परीक्षणों की विशेषताएं
- 5.5 मनोवैज्ञानिक परीक्षणों की आवश्यकता एवं उसका क्षेत्र
- 5.6 मनोवैज्ञानिक परीक्षणों का वर्गीकरण
- 5.7 परीक्षण की प्रक्रिया एवं उसका निष्कर्ष निकलना
- 5.8 सारांश
- 5.9 सन्दर्भ ग्रन्थ
- 5.10 निबंधात्मक प्रश्न

5.1 प्रस्तावना

इस इकाई में हम मनोवैज्ञानिक परीक्षण का अर्थ उसकी संकल्पना एवं परिभाषा पर विचार करेंगे साथ ही , मनोवैज्ञानिक परीक्षणों की विशेषताएं, मनोवैज्ञानिक परीक्षणों की आवश्यकता एवं उसका क्षेत्र, मनोवैज्ञानिक परीक्षणों का वर्गीकरण भी देखेंगे। इसके अतिरिक्त परीक्षण की प्रक्रिया एवं उसका निष्कर्ष निकलने के तरीकों का अवलोकन भी करेंगे।

5.2 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात आप-

1. मनोवैज्ञानिक परीक्षणों के बारे में बता सकेंगे
2. मनोवैज्ञानिक परीक्षणों की आवश्यकता की व्याख्या कर सकेंगे

3. मनोवैज्ञानिक परीक्षणों का विभिन्न क्षेत्रों में उपयोग पर चर्चा कर सकेंगे
4. मनोवैज्ञानिक परीक्षणों के विभिन्न प्रकारों पर चर्चा कर सकेंगे
5. मनोवैज्ञानिक परीक्षण की प्रक्रिया को विस्तार से बता सकेंगे
6. मनोवैज्ञानिक परीक्षणों से निष्कर्ष निकालना सीख सकेंगे

5.3 मनोवैज्ञानिक परीक्षण का अर्थ उसकी संकल्पना एवं परिभाषा

विभिन्न मनोवैज्ञानिक अध्ययनों से यह निश्चित हो गया है कि मानव व्यवहार के विभिन्न पहलुओं में व्यक्तिगत भिन्नाताएँ पाई जाती हैं। व्यक्तित्व के सर्वांगीण विकास के लिए ऐसे साधन की आवश्यकता अनुभव की जाने लगी है जिसके द्वारा व्यक्तिगत के प्रत्येक पहलू का यथार्थ मापन हो सके।

यही से मनोवैज्ञानिक परीक्षणों की रचना प्रारम्भ हुई और इसे चरम सीमा स्तर पर ले जाने का श्रेय अंग्रेज जीव शास्त्री फ्रेंसिस गाल्टन (1822-1911) तथा अमेरिकन मनोवैज्ञानिक जे.एम. कैटिल (J.M. Cattell, 1860-1944) को जाता है।

व्यक्तिगत विभिन्नताएँ के विस्तृत अध्ययन के लिए गाल्टन एवं कैटिल के विभिन्न यंत्रों एवं परीक्षणों की श्रृंखला का विकास किया जिससे व्यक्ति की बुद्धि, स्मृति, प्रत्यक्षीकरण संवेदना आदि से सम्बन्धित कार्यों का मापन किया जा सके।

तत्पश्चात् गिलबर्ट, क्रेपलिन, एबिंगहॉस आदि ने अपना योगदान देकर कार्य को आगे बढ़ाया।

मनोवैज्ञानिक परीक्षण का अर्थ और परिभाषा Definition of psychological Testing

साधारण बोल चाल की भाषा में मनोवैज्ञानिक परीक्षण व्यक्ति के व्यवहार का अध्ययन करने वाला ऐसा साधन है जो उसको ठीक से समझने में हमारी सहायता करता है। ये वस्तुनिष्ठ तरीके से मानकीकृत स्थितियों में व्यक्ति के व्यवहार के विभिन्न पहलुओं का परिमाणत्मक एवं गुणात्मक रूप से अध्ययन करते हैं।

मनोवैज्ञानिक वैज्ञानिक वह साधन है जिसके द्वारा मानव व्यवहार की विभिन्नताओं का यथार्थ मापन किया जाता है। ऐनेस्टैसी के विचारों में मनोवैज्ञानिक परीक्षणों का कार्य व्यक्तिगत भिन्नता का मापन करता है। यदि सब लोग एक जैसे हों तो परीक्षण की आवश्यकता नहीं होगी।

क्रोनबैक (Cronback) के अनुसार - दो या दो से अधिक व्यक्तियों के व्यवहार का तुलनात्मक अध्ययन करने की व्यवस्थित प्रक्रिया को परीक्षण कहते हैं।

A test is a systematic procedure for comparing the behaviour of two or more person

Froman (फ्रोमेन) के शब्द में - मनोवैज्ञानिक परीक्षण वह मानकीकृत यंत्र है जो कि सम्पूर्ण व्यक्तित्व के व्यवहार के एक या एक से अधिक पक्षों मापन शाब्दिक या अशाब्दिक अनुक्रियाओं या अन्य किसी प्रकार के व्यवहार के माध्यम से करता है।

A psychological test is a standardized instrument designed to measure objectively one or more aspects of personality by mean of verbal or non – verbal responses or by means of other behaviour

फ्रेडरिक ब्राउन (Fredrick Brown)- मनोवैज्ञानिक परीक्षण व्यवहार के प्रतिदर्श का मापन करने की व्यवस्थित विधि है।

A test is a Systematic procedure for measuring sample of behaviour.

उपर्युक्त परिभाषाओ के आधार पर मनोवैज्ञानिकों को परिभाषित करते हुए कहा जा सकता है कि परीक्षण एक मानकीकृत प्रक्रिया माप या यंत्र है जिस के द्वारा समस्त व्यक्तित्व एक पक्ष अथवा अधिक पक्षों का मापन शाब्दिक या अशाब्दिक अनुक्रियाओं या अन्य प्रकार के व्यवहार माध्यम से किया जाता है।

विभिन्न आयु वर्ग के व्यक्तियों की उपलब्धियों, क्षमताओं , योग्यताओं , रुचियों, समायोजन, व्यक्तित्व, अभिकृतियों और मूल्यों को मापने के लिए विभिन्न प्रकार के मानकीकृत परीक्षण उपलब्ध हैं

5.4 मनोवैज्ञानिक परीक्षणों की विशेषताएं Characteristics of Psychological test

मनोवैज्ञानिक परीक्षण की विशेषताएँ-

1. मनोवैज्ञानिक परीक्षण एक प्रकार की व्यवस्थित विधि है जिस के द्वारा मानव व्यवहार प्रतिदर्श का मापन किया जाता है।
2. मनोवैज्ञानिक परीक्षण एक प्रकार का मानकीकृत यंत्र है। एनास्तसी (1988) के अनुसार मानकीकरण का तात्पर्य परीक्षण के प्रशासन और मूल्यांकन की विधि में एक रूपया से है।

3. प्रमापीकृत मनोवैज्ञानिक परीक्षणों की प्रशासन विधि निश्चित होती है अर्थात् अध्ययन इकाई से परीक्षण कैसे भरवाना है क्या निर्देश देने और किस प्रकार से उसका मूल्यांकन करना है। यह अब पहले से ही निश्चित होता है।
4. मनोवैज्ञानिक परीक्षणों के द्वारा व्यक्तित्व के पक्ष अथवा अधिक पक्षों का मापना किया जाता है।
5. मनोवैज्ञानिक परीक्षणों के पद या प्रश्न शाब्दिक भी हो सकते हैं, अशाब्दिक भी हो सकते हैं अथवा दोनों प्रकार के भी हो सकते हैं।
6. इन परीक्षणों का उपयोग उन्हीं व्यक्तियों के गुणों के मापन के लिए किया जाता है जिनके लिए यह परीक्षण निर्मित होते हैं। उदाहरण के लिए, यदि कोई बुद्धि परीक्षण कक्षा दस के विद्यार्थियों के लिए है तो इसका उपयोग कक्षा आठ के विद्यार्थियों पर नहीं किया जा सकता है।
7. परीक्षण की विश्वसनीयता (Reliability) और वैधता (Validity) ज्ञात होती है। जब कोई अनुसन्धानकर्ता किसी परीक्षण का निर्माण मानकीकरण करता है तब वह उसकी विश्वसनीयता और वैधता भी ज्ञात करता है। एक मानकीकृत परीक्षण के लिए पहले से ही यह ज्ञात होता है कि इनकी विश्वसनीयता गुणांक का मान कितना है।

5.5 मनोवैज्ञानिक परीक्षणों की आवश्यकता एवं उसका क्षेत्र Need and Importance of Psychological Testing

मनोवैज्ञानिक परीक्षणों की आवश्यकता एवं महत्त्वता:-

जैसे की हम भलि- भांति जानते हैं कोई भी दो व्यक्ति एक समान नहीं होते उनमें उनकी रुचियाँ, अभिक्षमता, योग्यताओं, मानसिक स्तर, अभिवृत्तियों में विभिन्नताएं पाई जाती है। गौरतलब है कि आज के इस युग में विभिन्न प्रकार के क्षेत्रों के चयन हेतु मनोवैज्ञानिक परीक्षणों की आवश्यकता बहुत बड़ जाती है जिनका हम विस्तृत रूप से व्याख्या कर रहे हैं-

1. **पूर्व कथन (Prediction)**- पूर्व कथन का अर्थ है कि वर्तमान में जिस व्यवहार का अध्ययन किया गया है उस व्यवहार के अध्ययन के आधार पर यह भविष्यवाणी करना है कि भविष्य में अध्ययन किया गए व्यवहार का रूप और स्वरूप क्या होगा? मनोवैज्ञानिक परीक्षणों की सहायता से किसी भी व्यक्ति के सम्बंध में उसकी बुद्धि अभिक्षमता, उपलब्धि, रुचि, समायोजन तथा अन्य व्यक्तित्व विशेषताओं के सम्बन्ध में पूर्व कथन सरलता से किया जा सकता है।

2. **वर्गीकरण एवं चयन में मनोवैज्ञानिक परीक्षणों की आवश्यकता** - शिक्षा संस्थाओं में कक्षा में प्रवेश के समय विद्यार्थियों का चयन, औद्योगिक संस्थाओं में कर्मचारियों का वर्गीकरण और चयन, सेना और नौकरियों में शारीरिक और मानसिक भिन्नताओं के आधार पर व्यक्तियों और कर्मचारियों वर्गीकरण और चयन किया जाता है। इनके वर्गीकरण और चयन में मनोवैज्ञानिक परीक्षणों की बहुत आवश्यकता एवं उपयोग होता है।
3. **अनुसन्धान (Research)** - आधुनिक युग में मनोवैज्ञानिक का अनुसंधान क्षेत्र दिन-प्रतिदिन विस्तृत होता जा रहा है। प्रमाणीकृती मनोवैज्ञानिक परीक्षणों की सहायता से आज अनेक विशेषताओं लक्षणों और चरों आदि का मापन किया जाता है।
4. **उद्योग और व्यवसाय में आवश्यकता Need of Psychological Test in Industry of Occupation-** मनोवैज्ञानिक परीक्षण और शैक्षिक परीक्षणों का उपयोग उद्योग और व्यवसाय के क्षेत्र में आजकल बहुतायत से किया जा रहा है। विभिन्न व्यवसायों के लिए या उद्योग के विभिन्न क्षेत्रों में काम करने वाले कर्मचारियों के चयन, वर्गीकरण और पदोन्नति आदि में इन परीक्षणों बहुत आवश्यकता पड़ती है। उद्योग और व्यवसाय में लगे सुपरवाइजर, अधिकारी और मैनेजर और डायरेक्टर या चेयरमैन आदि के व्यवहार और व्यक्तित्व को समझने और जाचने या जानने में मनोवैज्ञानिक परीक्षणों की उपयोगिता दिन-प्रतिदिन बढ़ती जा रही है।
5. **व्यक्तिगत विभिन्नताओं के समबन्ध में (Individual Differences)** - प्रत्येक समाज में यह देखा जाता है कि व्यक्ति शारीरिक बनावट और वेषभूषा के आधार पर ही अलग-अलग नहीं होते बल्कि वह बुद्धि, तर्क, स्मृति, रूचि, अभिक्षमता, समायोजन, चिन्ता, कुण्डा और व्यक्तित्व की दृष्टि से अलग-अलग होते हैं। इन्हीं व्यक्तिगत भिन्नताओं के कारण ही आधुनिक युग में मनोवैज्ञानिक परीक्षणों की आवश्यकता महसूस की जा रही है।
6. **तुलना (Comparison)-** कक्षा में पढ़ने वाले विभिन्न छात्रों की शैक्षिक उपलब्धि की तुलना हो, उनकी बुद्धि की तुलना हो या अन्य शीलगुणों की तुलना हो इन सभी में मनोवैज्ञानिक परीक्षण की आवश्यकता और उपयोगिता है।
7. **दैनिक जीवन में आवश्यकता (Need in Daily Life)** - व्यवहारिक जीवन में हम सभी की कभी न कभी कुछ न कुछ समस्याएँ होती हैं और हमें इन समस्याओं के समाधान की आवश्यकता होती है। जीवन या व्यवहारिक जीवन की समस्याएँ कभी चिन्ता से सम्बन्धित होती है, कभी रूचियों से सम्बन्धित होती है, कभी कुण्ठा, तनाव, प्रतिबल (Stress) आदि से सम्बन्धित होती है। इन सभी समस्याओं का मापन और समाधान करने हेतु हमें मनोवैज्ञानिक परीक्षणों की अति आवश्यकता होती है।

8. **निदान (Diagnosis)** - मनोवैज्ञानिक परीक्षणों के द्वारा मानसिक रोगियों की समस्याओं के स्वरूप रोगों की गम्भीरता और रोगों के कारणों की जाँच सरलता से की जाती है। मानसिक रोगियों की अनेक प्रकार की व्यक्तिगत सम्बन्धी समस्याओं के निदान के लिए प्रेक्षण विधियों की आवश्यकता व उपयोग सबसे अधिक होता है।

5.6 मनोवैज्ञानिक परीक्षणों का वर्गीकरण Classification of psychological testing

मनोविज्ञान और शिक्षा में अनेक प्रकार के मनोवैज्ञानिक परीक्षणों का उपयोग किया जा रहा है। यह परीक्षण जहाँ अनेक शीलगुणों (Traits) का मापन करते हैं वही इन परीक्षणों के द्वारा अनेक प्रकार के प्रत्ययों का मापन भी किया जाता है। अलग-अलग मनोवैज्ञानिक ने विभिन्न मनोवैज्ञानिक परीक्षणों अपने-अपने ढंग से मापन व वर्गीकरण किया है। वाद और विवाद में न पडते हुए क्रॉनबैक (1971) और एनास्टसी (1982) के वर्गीकरणों को संक्षेप में दिया गया है। इसके साथ-साथ मनोविज्ञान के क्षेत्र में सर्वाधिक प्रचलित वर्गीकरण को समझाया गया है।

क्रॉनबैक का वर्गीकरण:-

(Cronback's Classification) क्रॉनबैक ने मुख्यतः परीक्षणों का दो भागों में वर्गीकृत किया है:-

अधिकतम निष्पादन परीक्षण:-

1. (Test of maximum performance) क्रॉनबैक के अनुसार यह वह मनोवैज्ञानिक परीक्षण है जिसके द्वारा यदि मापन किया जाए तो यह ज्ञात हो जाता है कि एक व्यक्ति अपनी योग्यता के अनुसार अधिक कितना निष्पादन कर सकते हैं। इसमें मुख्यतः अनेक प्रकार के मनोवैज्ञानिक परीक्षण आते हैं:-
 - i. सामान्य मानसिक योग्यता परीक्षण (**General Mental ability Test**)
 - ii. विशिष्ट योग्यता परीक्षण (**Specific ability test**)
 - iii. उपलब्धि परीक्षण (**Achievement Test**)
 - iv. अभिक्षमता परीक्षण (**Aptitude Test**)

2. विशिष्ट निष्पादन परीक्षण (**Tests of Typical Performance**)

“विशिष्ट निष्पादन परीक्षणों का उपयोग यह ज्ञात करने के लिए नहीं किया जाता कि एक व्यक्ति क्या कर सकता है बल्कि इसका उपयोग इसलिए किया जाता है कि एक व्यक्ति क्या करता है”

Test of typical performance aroused to investigate not what the person can do but what he does?

अर्न्तमुखी, बहिर्मुखता और ईमानदारी आदि का मापन योग्यता परीक्षणों द्वारा नहीं किया जाता है। अधिकतम निष्पादन परीक्षणों के अन्तर्गत जिन मनोवैज्ञानिक परीक्षणों का ऊपर उल्लेख किया गया है उनके अतिरिक्त मनोविज्ञान में जितने अन्य परीक्षण है वह यह सब विशिष्ट निष्पादन परीक्षण के अन्तर्गत आते हैं। क्रॉनबैक का यह वर्गीकरण एक प्रकार का स्थूल वर्गीकरण है।

एनांस्तसी का वर्गीकरण Anastasi's Classification

मनोवैज्ञानिक परीक्षणों का वर्गीकरण अग्रप्रकार **Anastasi** ने निम्न प्रकार से किया है:-

व्यवहार के आधार पर वर्गीकरण Classification on the basis of behaviour

- i. सामान्य वर्गीकृत परीक्षण (General Classification Tests)
- ii. भेदक अभिक्षमता परीक्षण मालाएं (Differential aptitude batteries)
- iii. उपलब्धि अभिक्षमता परीक्षण (Achievements Tests)
- iv. विशिष्ट अभिक्षमता परीक्षण (Special Aptitude Tests)
- v. व्यक्तित्व परीक्षण (Personality Tests)

उपरोक्त प्रचलित वर्गीकरण में दिए गए परीक्षणों का विवरण निम्नलिखित प्रकार से है-

1. प्रशासन के आधार वर्गीकरण (Classification on the Basis of Administration)

- i. **व्यक्तिगत परीक्षण (Individual Test)** यह वह परीक्षण जिसके द्वारा एक ही समय में एक व्यक्ति पर उसकी मनोवैज्ञानिक विशेषताओं या व्यवहार का मापन अधिक व्यापक एवं गहन विधि से किया जाता है। इस प्रकार के परीक्षणों का उपयोग बहुधा छोटे बच्चों के व्यवहार के मापन में अथवा समस्याग्रस्त या असामान्य के रोगों के निदान में होता है। इन परीक्षणों के द्वारा व्यक्ति व्यवहार का गूढ़ और गहन अध्ययन

किया जाता है। इस श्रेणी के अर्न्तगत विनय साइमन बुद्धि परीक्षण, रोक्षी परीक्षण और (T.A.T) टी.ए.टी परीक्षण भी इसी श्रेणी में आते हैं।

- ii. **सामूहिक परीक्षण (Group Test)** इस परीक्षण का उपयोग एक ही समय एक से अधिक व्यक्तियों पर किया जाता है। इन परीक्षणों के उपयोग से समय और धन की बचत होती है। इन परीक्षणों की विश्वसनीयता और वैधता पर्याप्त और सन्तोषजनक होती है। सामूहिक परीक्षणों से व्यापक और गहन करना कठिन होता है। इन परीक्षणों का उपयोग सैनिकों की भर्ती के लिए, उद्योगों में कर्मचारियों का चयन और आधुनिक युग में विद्यालय और महाविद्यालय में विद्यार्थियों के चयन में अथवा प्रवेश के लिए किया जाता है।

- उदाहरण:-
- 1) मोहनचन्द्र जोशी - 'सामान्य मानसिक योग्यता परीक्षण'
 - 2) एस. जलोटा - मानकीकृत मानसिक बुद्धि परीक्षण

2. **मानकीकरण के आधार पर वर्गीकरण (Classification on the Basis of Standardization)** एनास्टसी (A. Anastasi, 1982) ने मानकीकरण के अर्थ को स्पष्ट करते हुए लिखा है कि मानकीकरण का अर्थ परीक्षण की प्रशासन विधि और फंलाकन विधि में एक रूपता है।

“Standardization implies uniformity procedure in administering and scoring the test”

- i. **मानकीकृत परीक्षण (Standardized Test)** - यह वह परीक्षण है जिनकी विश्वसनीयता, वैधता और मानक उपलब्ध होते हैं। इनके प्रशासन और मूल्यांकन में समरूप विधियों का उपयोग किया जाता है। विश्वसनीयता और वैधता ज्ञात करने के लिए और मानकों का निर्धारण करने के लिए विशेषज्ञों की राय के आधार पर बने परीक्षण को एक बड़े समूह पर प्रशासित किया जाता है। उदाहरण:- बेथूर बुद्धि परीक्षण इस परीक्षण का विश्वसनीयता गुणांक अर्धविच्छेद विधि से 0.90 और पुर्न परीक्षण विधि से मान 0.94 है। इस परीक्षण की वैधता गुणांक की गणना स्टेनफोर्ट बुद्धि परीक्षण की सहायता से की गई है।
- ii. **अमानकीकृत या अध्यापक निर्मित परीक्षण:-** यह वह मनोवैज्ञानिक परीक्षण है जिनकी विश्वसनीयता, वैधता ज्ञान नहीं होती और मानक भी उपलब्ध नहीं होते,

इसलिए इन परीक्षणों को अध्यापक निर्मित परीक्षण कहते हैं। बहुधा यह अध्यापकों द्वारा बनाए जाते हैं जिनका प्रयोग स्कूल, विद्यालय में ही किया जाता है।

उदाहरण:-

- a. **Essay Type**
- b. **Objective Type**
- c. Diagnostic Test नैदानिक परीक्षण

3. माध्यम के आधार पर वर्गीकरण (Classification on the Basis of Medium)

i. शाब्दिक परीक्षण (Verbal Test)

यह वह परीक्षण है जिनसे एक व्यक्ति के व्यवहार विशेष का मापन शाब्दिक प्रश्नों के द्वारा मौखिक या लिखित रूप से उत्तर प्राप्त करके किया जाता है। इनके पदों में भाषा का उपयोग होता है और उन्हीं व्यक्तियों पर इनका प्रयोग किया जाता है। जो इसकी प्रयुक्त भाषा को समझते हैं।

उदाहरण:

- जलोटा सामान्य मानसिक क्षमता परीक्षण
- पेपर पेन्सिल परीक्षण

ii. अशाब्दिक परीक्षण (Non- Verbal Test)

इस प्रकार के परीक्षणों के पद चित्रों और आकृतियों आदि के रूप में होते हैं। इस प्रकार के परीक्षणों के निर्देश यद्यपि भाषा में होते हैं। लेकिन एकसे निर्देशों को उस भाषा में प्रयोज्यों को समझाया जाता है। जो भाषा प्रयोज्य जानते हैं। परीक्षण के पद चित्रों, आकृतियों के अतिरिक्त ज्यामितीय आकृतियों रेखाओं और बिन्दुओं से बनी डिजाइनों अथवा सजीव या निर्जिव वस्तुओं के चित्रों के रूप में होते हैं। इन परीक्षणों को 'संस्कृतिमुक्त परीक्षण' (Cultural free or cultural fair Tests) भी कहते हैं।

उदाहरण:-

- कैटिल द्वारा निर्मित - "संस्कृतिमुक्त सामान्य मानसिक योग्यता परीक्षण"
- रोजनबिग पी. एफ. स्टडी (जिसमें बालकों और व्यस्कों की कुण्ठा का मापन किया जाता है।)

iii. निष्पादन परीक्षण या क्रियात्मक परीक्षण (Performance Test)

यह वह मनोवैज्ञानिक परीक्षण है जिनकी सहायता से एक व्यक्ति के निष्पादन का अथवा क्रियात्मक योग्यताओं का मापन किया जाता है। इस प्रकार के परीक्षणों में क्रियात्मक योग्यताओं का मापन विभिन्न वस्तुओं, चित्रों, यांत्रिक उपकरणों और ब्लाक आदि से बने पदों का प्रश्नों आदि की सहायता से किया जाता है।

उदाहरण:

- पोर्टियस द्वारा निर्मित व्यूह परीक्षण (**Porteus Maze Test**)
- कोह ब्लाक डिजाइन परीक्षण (**Koh's Block Design Test**)
- भाटिया की निष्पादन परीक्षण (**Bhatia Battery of Performances Tests**)

इस प्रकार के परीक्षणों का उपयोग अधिकांशतः छोटे बच्चों तक ही सीमित होते हैं।

4. फलांकन के आधार पर वर्गीकरण (Classification on the Basis of scoring)

- i. वस्तुनिष्ठ परीक्षण (Objective Test) इस प्रकार के परीक्षण वह परीक्षण हैं जिनमें परीक्षण का फलांकन करते समय परीक्षण में प्राप्त अंकों के रूप में प्रदान किए जाते हैं तथा यह वस्तुनिष्ठ फलांकन परीक्षण तब कहलाते हैं जब वह विभिन्न परीक्षक किसी परीक्षार्थी को एक से अंक प्रदान करता है। जब परीक्षण का फलांकन उत्तर कुंजी, स्टेन्सिल या मशीन की सहायता से किया जाता है। तो इस प्रकार के फलांकन प्रायः वस्तुनिष्ठ होते हैं।
- ii. आत्मनिष्ठ परीक्षण (Subjective Test). इसमें परीक्षण का फलांकन करते समय अंकों में न होकर भाषा या शब्दों में होता है। इस प्रकार के फलांकन में परीक्षक के निर्णय बहुत महत्त्वपूर्ण माने जाते हैं। आत्मनिष्ठ परीक्षणों में जब अनेक परीक्षक (Examiner) फलांकन करते हैं तो उनके फलांकन में भिन्नता दिखाई देती है।

उदाहरण: Essay Type Examine निबन्धात्मक परीक्षाएं आत्मनिष्ठ परीक्षणों का उदाहरण हैं।

एक समायोजित परिसूची की सहायता से समायोजन का मापन (Adjustment by using a suitable adjustment Inventory)

- i. उद्देश्य (Objective)- एक समायोजित परिसूची के द्वारा किसी विद्यार्थी के समायोजन का मापन करना।
- ii. आवश्यक परीक्षण सामग्री एवं परिस्थितियाँ

- a. डॉ० ए० के० पी० सिंहा तथा डॉ० आर० पी० सिंह द्वारा निर्मित कॉलेज विद्यार्थियों हेतु समायोजन परिसूची की एक प्रति जिसमें परीक्षण पुस्तिका , उत्तर पत्र तथा परीक्षण निर्देशिका शामिल है।
- b. परीक्षण हेतु उचित व्यवस्था एवं उपयुक्त वातावरण।
- c. परीक्षार्थी का परिचयात्मक विवरण:- Identifying data of the Subject

नाम : सौमेश आयु : 17 वर्ष

कक्षा : 12वीं लिंग : पुरूष

पिता का व्यवसाय : नौकरी, 14,000 रू प्रतिमाह

- d. परीक्षण सामग्री का विवरण- (Description of the Material)

इसमें समायोजन के 5 क्षेत्रों-घर, स्वास्थ्य, सामाजिक संवेगात्मक तथा शैक्षिकसे सम्बन्धित समायोजन को मापने का प्रयत्न किया गया है।

- i. **परीक्षण पुस्तिका (Test Booklet)**- इसमें कुल 8 पृष्ठ हैं। पृष्ठ 3 से 7 तक ही परीक्षण प्रश्न दिये हुए हैं जिनकी गिनती 102 है। इसी उत्तर पत्र के नीचे के हिस्से में अंकन-
- ii. **तालिका (Scoring Table)** बनी होती है जिसका उपयोग परीक्षण द्वारा किया जाता है।
- iii. **परीक्षण निर्देशिका (Test Manual)**- इस निर्देशिका में परीक्षार्थी के उत्तरों की जाँच करके उसके प्राप्तांकों की गणना क्षेत्र अनुसार तथा कुल समायोजन के रूप में कैसे की जाये तथा फिर प्राप्तांकों की सहायता से उसकी समायोजन क्षमता या स्तर के बारे में कैसे निष्कर्ष निकाले जाये।
- e. **परीक्षण लेना (Administration of the Test)**- प्रस्तुत समायोजन परिसूची से समायोजन मापन हेतु निम्न प्रकार आगे बढ़ा गया।
- i. सबसे पहले परीक्षार्थी को सुविधा जनक स्थिति में आराम से बैठाया गया। परीक्षण से सम्बन्धित उपयुक्त सुविधाएँ तथा शांत वातावरण प्रदान करने के सभी आवश्यक उपाय किये गए।
- ii. उसे परीक्षण पुस्तिका तथा उत्तर- पत्र की एक-2 प्रति दे दी गई।
- iii. इसके पश्चात उससे उत्तर-पत्र पर बने परिचयात्मक विवरण सम्बन्धी कॉलमों को भरने के लिए कहा गया। इन्हें परीक्षण द्वारा स्वयं भी पढ़कर स्पष्ट कर दिया गया।

5.7 मनोवैज्ञानिक परीक्षण की प्रक्रिया एवं उसका निष्कर्ष निकलना

Testing Procedure and Interpretation of Test Scores

जैसे की आप जान गए होंगे की कोई दो व्यक्ति आपस में एक समान नहीं होते और आपको कई बार स्वयं भी यह जिज्ञासा हो सकती है कि आपकी बुद्धि स्तर क्या हैं। आपकी रुचियाँ और अभिरूचियाँ किस प्रकार की हैं। व्यक्तित्व की दृष्टि से आप कैसे हैं। आप अपने और अपने वातावरण से कितने समायोजित है। यह सब जानने के लिए इसका मापन करना होता है इस मापन हेतु मनोवैज्ञानिकों का प्रयोग किया जाता है। जिसे बड़ी मेहनत से वैज्ञानिकों और अनुसंधानकर्ताओं द्वारा मानकीकृत करके इन्हें प्रयोग में लाने सम्बन्धी सामग्री तथा रूपरेखा के रूप में प्रस्तुत किया जाता है। जिन बातों के मापन की हमने यहाँ चर्चा की है, उनसे सम्बन्धित विभिन्न प्रकार के मनोवैज्ञानिक परीक्षण भलि भाँति उपलब्ध हैं। ऐसे ही कुछ प्रसिद्ध मनोवैज्ञानिक परीक्षणों का चयन करके हम आपको उनकी परीक्षण विधि व व्याख्या से परिचित करायेंगे।

बुद्धि मापन (Measurement of Intelligence)

बुद्धि परीक्षण इस तरह किसी की बुद्धि में निहित विभिन्न तत्वों या कारकों के स्वरूप का पता लगाकर उसकी बुद्धि को मापने का ही प्रयत्न करते हैं। इस प्रकार के कार्य में प्रयुक्त परीक्षण या तो शाब्दिक (Verbal) होते हैं अथवा अशाब्दिक (Non-Verbal)

शाब्दिक बुद्धि परीक्षण (Verbal Intelligence Test)

- i. उद्देश्य -किसी शाब्दिक बुद्धि परीक्षण (Verbal Intelligence Test) के द्वारा किसी एक विद्यार्थी की बुद्धि का परीक्षण करना।
- ii. आवश्यक परीक्षण सामग्री एवं परिस्थितियाँ:-
 - a. डॉ० श्याम सुन्दर जटोला द्वारा निर्मित ” मानसिक योग्यता की सामूहिक परीक्षण” की एक प्रति जिसमें परीक्षण पुस्तिका, उत्तर-पत्र, उत्तर-तालिका तथा परीक्षण मैनुअल शामिल हो
 - b. एक विद्यार्थी जिसकी बुद्धि का परीक्षण करना है
 - c. विद्यार्थी की बुद्धि के परीक्षण हेतु उचित परिस्थितियों की व्यवस्था
 - d. समय देखने हेतु एक टेबल घड़ी

iii. परीक्षार्थी का परिचयात्मक विवरण (Identifying data of the subject)

विद्यार्थी का नाम:- रमेश, विद्यालय का नाम: मॉडल स्कूल रोहतक, कक्षा टपपप, जन्म तिथि 5-1-1984, परीक्षण तिथि 5-1-2006

iv. परीक्षण सामग्री का विवरण:- (Description of the Material)

हम इस परीक्षण के द्वारा परीक्षार्थी रमेश की बुद्धि का परीक्षण कर रहे हैं। इसे हिन्दी भाषी बालकों की बुद्धि परीक्षण हेतु (जो 8वीं 9वीं तथा 10वीं कक्षाओं में पढ़ते हो) तैयार किया गया है। इसकी परीक्षण सामग्री को मुख्य रूप से निम्न चार भागों में बाँटकर समझा जा सकता है।

a. परीक्षण पुस्तिका - इस पुस्तिका के प्रारम्भिक पृष्ठ पर परीक्षा देने सम्बन्धि आवश्यक निर्देश लिखे होते हैं। चौथे पृष्ठ से बुद्धि परीक्षा सम्बन्धि प्रश्न शुरू होते हैं। यह प्रश्न संख्या में 100 है तथा प्रत्येक पृष्ठ पर 20 प्रश्नों की सूची है। अधिकार ये प्रश्न बहुविकल्पीय हैं। कुछ प्रश्न ऐसे भी हैं जिसमें विकल्प नहीं होते और उत्तर के लिए कोई अंक या संख्या होती है इन दोनों प्रकार के प्रश्नों के नमूने निम्न है।

तट का अर्थ है- गंगा (इ) किनारा (ब) बाध (क) पर

2, 19,17,13,11 इन संख्याओं के क्रम के अनुसार आगे की संख्या उत्तर पत्र

लिखो।

b. उत्तर-पत्र (Answer Sheet)

c. उत्तर तालिका (Scoring Key)

d. परीक्षा निर्देशिका या मैनुअल (Test Manual)

e. परीक्षा से परीक्षा लेना (Administration of the Test)

f. उत्तरों का अंकन करना(Scoring of the Test)- उत्तरों का अंकन करने हेतु उत्तर-तालिका की सहायता ली गई। जो प्रश्न सही थे उन सभी के लिए एक-एक अंक प्रदान किया गया। मान लो परीक्षार्थी रमेश ने 53 प्रश्नों के सही उत्तर दिये थे अतः उसे 53 अंक प्रदान किये गए।

g. परिणामों की व्याख्या (Interpretation of the Result)

- पहले इन प्राप्तांको से उसकी मानसिक आयु मालूम की गई। इस कार्य हेतु परीक्षण मैनुअल में दी गई परिवर्तन तालिका की सहायता ली गई। 53 के अंको से इस तरह 15 वर्ष उसकी मानसिक आयु अनुमानित की गई। अब परिचायात्मक विवरण में (जो हमने परीक्षार्थी से परीक्षण शुरू होने से पहले ही प्राप्त कर लिया था) दी हुई जन्म तिथि के कॉलम से उसकी शारीरिक आयु ज्ञात कर ली गई। यह आयु 12 वर्ष 6 माह ज्ञात की गई।

इन दोनों आयुओं को माह में बदल कर निम्न प्रकार बुद्धि लब्धि ज्ञात की गई।

$$\begin{aligned} \text{मानसिक आयु} &= 15 \text{ वर्ष} = 180 \text{ माह} \\ \text{शारीरिक आयु} &= 12 \text{ वर्ष } 6 \text{ माह} = 150 \text{ माह} \\ \text{बुद्धि लब्धि (IQ)} &= \frac{\text{मानसिक आयु}}{\text{शारीरिक आयु}} \times 100 \\ &= 180/150 \times 100 = 120 \end{aligned}$$

इस तरह रमेश की बुद्धिलब्धि (IQ) 120 अनुमानित की गई। इस बुद्धि लब्धि की दृष्टि से रमेश की बौद्धिक क्षमता किस तरह की हो सकती है इसका अनुमान लगाने के लिए टरमन द्वारा वर्णित तालिका की सहायता ली गई।

- दूसरे तरीके से प्राप्तांको की व्याख्यान करने के लिए प्राप्त 53 अंको को स्टेनाइन अंको में परिवर्तित किया गया। इस कार्य के लिये उत्तर-तालिका में बाँई और दी हुई तालिका की सहायता ली गई। रमेश 8 वीं कक्षा का छात्र है। अतः उसके 53 प्राप्तांको के लिए स्टेनाइन अंक 6 आये। अब इन स्टेनाइन को उत्तर-पत्र पर नीचे अंकित स्केल के माध्यम से ग्रेड में बदल गया। यहाँ 6 स्टेनाइन स्कोर के लिय यानी तीव्र श्रेणी प्राप्त हुई। अतः इस दृष्टि से भी रमेश तीव्र बुद्धि वाला माना जा सकता है।

उपलब्धि अभिप्रेरणा की माप

हम यह कैसे जान सकते हैं कि अमुक बच्चे में उपलब्धि अभिप्रेरणा अधिक है और अमुक बच्चे में कप है? उपलब्धि कप है? उपलब्धि अभिप्रेरणा को मापने के लिए विभिन्न विधियों का निर्माण किया गया है। इन्हें दो भागों में बाँटा जा सकता है।

- उपलब्धि अभिप्रेरणा पैमाने
- टी0 ए0 टी0 प्रकार के प्रसाधन

एक अभिप्रेरणा परीक्षण

1. उद्देश्य - एक अभिप्रेरणा परीक्षण के द्वारा किसी विद्यार्थी की उपलब्धि अभिप्रेरणा का स्तर ज्ञात कराना। आवश्यक परीक्षण सामग्री एवं परिस्थितियाँ
2. डा० वी० पी० भार्गव द्वारा निर्मित उपलब्धि अभिप्रेरणा परीक्षण की एक प्रति जिसमें परीक्षण पुस्तिका अंकन-कुंजी तथा परीक्षण निर्देशिका शामिल हो
3. विद्यार्थी जिसकी उपलब्धि-अभिप्रेरणा का मापन करना है।
4. परीक्षण हेतु उचित वातावरण एवं परिस्थितियाँ:-

यह विवरण परीक्षण निम्न हैं:-

नाम - सुरेन्द्र कुमार, आयु 18 वर्ष कक्षा बी० ए० प्रथम वर्ष

महाविद्यालय - वैश्य कॉलेज रोहतक,

पिता का नाम - श्री आ० पी० वर्मा

पिता का व्यवसाय: सरकारी नौकरी, दिनांक.....

5. परीक्षण सामग्री का विवरण - इसके द्वारा 16 से लेकर 22 वर्ष के कॉलिज के विद्यार्थियों की उपलब्धि अभिप्रेरणा का मापन किया जा सकता है। इसकी परीक्षण सामग्री को निम्न भागों में बाँट कर और अच्छा परिचय प्राप्त किया जा सकता है।\
 - परीक्षण पुस्तिका
 - अंकन कुंजी एक शीट के ऊपर 1 से लेकर 50 तक प्रश्न संख्या लिखी हुई है। और उनके आगे सही विकल्प क, ख, ग, के रूप में लिखे हुए है।

परीक्षण निर्देशिका (Test Manual) इसी निर्देशिका से ही मालूम पड़ता है।

कि इस परीक्षण को 16 से लेकर 22 वर्ष के कॉलिज विद्यार्थियों के लिए भारत में प्रयुक्त किया जा सकता है क्योंकि कवल इन्ही के प्राप्ताकों को उपलब्धि अभिप्रेरणा स्तरों में बदलने हेतु नॉर्मस मैनुअल में दिये हुए है तथा इन स्तरों को उचित व्याख्या भी दी गई है। जिससे परीक्षण के परिणामों की उचित व्याख्या परीक्षण के द्वारा की जा सकती है। मैनुअल में दिये हुए ये तथा व्याख्या आवश्यक संशोधन के साथ आगे दी जा रही है।

प्राप्तांक	उपलब्धि अभिप्रेरणा
------------	--------------------

छात्र	छात्राएँ	स्तर	Interpretation
23 and above	23 and above	उच्च (High)	परीक्षार्थी का उपलब्धि-अभिप्रेरणास्तर काफी प्रशंसनीय तथा सामान्य से बहुत ऊँचा है।
19-22	22-22	सामान्य से अधिक	परीक्षार्थी की उपलब्धि अभिप्रेरणा का स्तरसामान्यतया अन्य बालकों की अपेक्षा ज्यादा है
17-18	17-19	सामान्य	परीक्षार्थी का उपलब्धि अभिप्रेरणा का स्तर अन्य सामान्य बालकों की तरह है
15-16	14-16	सामान्य से कम	परीक्षार्थी का उपलब्धि अभिप्रेरणा का स्तर में सामान्य बालकों से नीचे है
11-14	11-13	निम्न	उपलब्धि-अभिप्रेरणा के स्तर में काफी कमी है

6. **परीक्षा लेना** - अभिप्रेरणा परीक्षण की सहायता से विद्यार्थी की परीक्षा लेने हेतु निम्न प्रकार से आगे बढ़ा गया।
 - a. सबसे पहले विद्यार्थी को उचित परीक्षा वातावरण तथा परिस्थितियाँ प्रदान करके आराम से बैठाया गया तथा फिर उसे परीक्षण पुस्तिका दे दी गई।
 - b. इस पुस्तिका के मुख पृष्ठ पर अंकित ऊपर के सभी कालमों को भरने के लिए कहा गया ताकि उसका परिचयात्मक विवरण प्राप्त किया जा सके।
 - c. उसे पूर्ण विश्वास में लेकर यह बताया गया कि यहाँ उसकी कोई परीक्षानहीं ही रही है परन्तु कुछ बातों में उसकी अपनी जो राय या विचार है उन्हें ही मालूम किये जाने का प्रयत्न किया जा रहा है उसे क्या कुछ करना है इसके लिए मुख पृष्ठ पर दिये गए निर्देशों को ध्यान से पढ़ने के लिए कहा गया।
7. **अंकन-कुंजी** - विद्यार्थी के उत्तरों के मूल्यांकन हेतु अंकन-कुंजी की सहायता ली गई तथा सही उत्तरों के लिए एक-2 अंक प्रदान करके प्राप्तांको का योग ज्ञात कर लिया गया। परीक्षार्थी सुरेन्द्र ने 20 प्रश्नों के सही उत्तर दिये थे अतः उसे 20 अंक प्रदान किये गए।
8. **प्राप्तांको की व्याख्या** - प्राप्तांको की सहायता से उपलब्धि अभिप्रेरणा स्तर का अनुमान लगाने के लिए निम्न प्रकार आगे बढ़ा गया।
 - i. मैनुअल में दिए हुए नार्मस की सहायता से सबसे पहले उसके प्राप्तांको के आधार पर उसके अभिप्रेरणा स्तर को ज्ञात किया गया। लड़को के कॉलम में दिए गए प्राप्तांको के

वर्गों के मिलान से ज्ञात हुआ कि अपना परीक्षार्थी सुरेन्द्र 20 प्राप्तांको के आधार पर सामान्य से ऊपर वर्ग श्रेणी में आता है।

- ii. मैनुअल में दी गई इसकी व्याख्या के अनुसार (जिसकी चर्चा हम यहाँ पहले के पृष्ठों में कर चुके हैं) इस तरह सुरेन्द्र के उपलब्धि अभिप्रेरणा स्तर के बारे में निम्न निष्कर्ष निकाला जा सकता है।

“हमारा विद्यार्थी सुरेन्द्र प्रस्तुत परीक्षण के आधार पर ऐसा विद्यार्थी है जिसका उपलब्धि स्तर अन्य बालको की तुलना में सामान्य से कुछ ऊपर ही है। इसे जीवन में कुछ कर सकने की तमन्ना तथा पाने की लालसा दूसरों की अपेक्षा ज्यादा दी है। अतः इसे आगे बढ़ने की पूर्ण सुविधाएँ तथा अवसर देने के यथासम्भव प्रयत्न किये जाने चाहिए”

सृजनात्मकता का मापन

उद्देश्य - सृजनात्मक परीक्षण द्वारा किसी प्रयोज्य के सृजनात्मक स्तर का पता लगाना।

परिचयात्मक विवरण

प्रयोज्य का नाम : आयु

कक्षा : विद्यालय

प्रयोगकर्ता का नाम : दिनांक

परीक्षण सामग्री का विवरण - प्रस्तुत परीक्षण डॉ0 बाकर मेंहदी द्वारा तैयार किया गया है यह एक शाब्दिक है जिसके द्वारा यह पता लगाने की कोशिश की जाती है कि कौन व्यक्ति कितनी मात्रा में सृजनशील है। इसका प्रकाशन नेशनल साइकोलोजिकल कॉरपोरेशन आगरा द्वारा किया गया है इसकी परीक्षण सामग्री को निम्न तीन भागों में बांट कर समझा जा सकता है।

परीक्षण पुस्तिका इस पुस्तिका में प्रारम्भिक पृष्ठ पर परीक्षण सम्बन्धी आवश्यक निर्देश दिये गए हैं। आगे के पृष्ठों में चार प्रकार के कार्यों से संबंधित समस्यात्मक प्रश्न पूछे गये हैं जिनके उत्तरों के लिए स्थान भी छोड़ा गया है।

कार्य 1 का शीर्षक है- यदि ऐसा हो जाये तो -

इसके अन्तर्गत निम्न तीन समसयाएँ हैं।

यदि मनुष्य पक्षियों की भाँति उड़ने लगे तो क्या होगा ?

यदि आपके विद्यालय में पहिये लग जायें तो क्या होगा ?

यदि मनुष्य को खाने की आवश्यकता न रहे तो क्या होगा ?

कार्य-2 का शीर्षक है- वस्तुओं के नये-नये प्रयोग-

इसके अन्तर्गत निम्न समस्याएँ दी गई हैं।

1. पत्थर का टुकड़ा, 2. लकड़ी की एक छड़ी, 3. पानी।

उपरोक्त तीनों वस्तुओं को कितने नए, विचित्र तथा रोचक तरीकों से प्रयोग में लाया जा सकता है। उन्हें दिये हुए खाली स्थानों में प्रयोज्यों को लिखना होता है।

कार्य 3 का शीर्षक है- नये सम्बन्ध का पता लगाना।

इसके अतिरिक्त निम्न तीन समस्याएँ दी गई हैं।

1. पेड़ और मकान, 2. कुर्सी और सीढ़ी, (नसैनी) 3. हवा और पानी।

उपरोक्त तीनों जोड़ों में जो भी सम्बन्ध हो सकते हैं उनमें बहुत ही नए-नए तथा विचित्र सम्बन्धों को प्रयोज्य द्वारा खाली जगह में लिखना होता है।

कार्य 4 का शीर्षक है- वस्तुओं का मनोरंजक तथा विचित्र बनाना।

इस कार्य में प्रयोज्य से कहा गया है कि वह घोड़े के एक सादे खिलौनी को ध्यान में रखकर यह बताएँ कि इसे किस तरह से अधिक मनोरंजक तथा विचित्र बनाया जा सकता है।

परीक्षण लेना

- i. प्रयोज्य को आरामदायक स्थिति में बैठाया गया तथा उसे प्रयोग के उद्देश्य के बारे में बताया गया।
- ii. उसे परीक्षण पुस्तिका दे दी गई तथा उसमें दिये गए मृखपृष्ठ निर्देशों को पढ़ने के लिए कहा गया।

- iii. इस परीक्षण के 4 प्रकार के कार्यों के बारे में बताया गया तथा उसे किस प्रकार उत्तर देने हैं इसे उदाहरणों द्वारा स्पष्ट कर दिया गया।
- iv. चारों प्रकार के कार्यों में जो समस्याएँ दी गई हैं उनके उत्तर उसे निश्चित समय में जैसे पहले कार्य के लिए 15 मिनट, दूसरे के लिए 12 मिनट, तीसरे के लिए 15 मिनट तथा चौथे के लिए 6 मिनट निर्धारित हैं।
- v. समय (1 घन्टा 18 मिनट) पूरा होने पर उनसे परीक्षण पुस्तिका वापिस ले ली गई हैं।
- vi. प्रयोज्य को दो खाली पेज भी दिये गए ताकि अगर उसके पास किसी समस्या के लिए ज्यादा उत्तर या अनुक्रियाएँ हो तो वह उन्हें अतिरिक्त रूप से लिख लें।

अंकन करना -प्रयोज्य के उत्तरों के अंकन के लिए तीन श्रेणियाँ इस परीक्षण में रखी गई हैं। (1) प्रवाहिकता (Fluency), (2) लचीलापन (Flexibility), तथा (3) मौलिकता (Originality), अंकन निर्देशन हेतु परीक्षण पुस्तिका (जमेज ठववासमज) में निम्न मार्गदर्शन प्रदत्त हैं।

स्कोरिंग शीट जो इस परीक्षण में प्रयुक्त की गई

(Scoring Sheet Used in Creativity test)

ACTIVITY 1

	Fluency	Flexibility	Originality
Item 1
Item 2
Item 3
Total			

ACTIVITY 2

	Fluency	Flexibility	Originality
Item 1
Item 2

Item 3

Total

ACTIVITY 3

	Fluency	Flexibility	Originality
Item 1
Item 2
Item 3

Total

SCORE SUMMARY

	Fluency	Flexibility
Originality		
Activity I
.....		
Activity II
.....		
Activity III
.....		
Activity IV
.....		

Total

परीक्षण के प्राप्तांकों से निष्कर्ष निकालना - इस सृजनात्मक परीक्षण द्वारा हमें किसी प्रयाज्य क तीन प्रकार की सृजनात्मक विशेषताओं -मौलिकता (Originality) प्रवाहात्मकता (Fluency) तथा

लचीलापन (Flexibility) के सन्दर्भ में तीन तरह के प्राप्तांक प्राप्त होते हैं इनके अतिरिक्त इन तीनों को जोड़कर उसके सृजनात्मकता सम्बन्धी कुल अंक भी प्राप्त कर सकते हैं। इन प्राप्तांका से आगे निष्कर्ष निकालने के लिए अब अग्रांकित उपाय देखें।

1. अगर हम ऐसे प्रयोज्य का सृजनात्मक परीक्षण ले रहे हैं जो परीक्षण के मैनुअल में दिये गए समूह विशेष में छवतडे के सन्दर्भ में अपने प्रयोज्य की सृजनात्मकता स्तर की व्याख्या कर सकते हैं।
2. दूसरे परिस्थिति में अगर हम किन्ही ऐसे परीक्षार्थियों की परीक्षण ले रहे हैं जो ऐसे समूह से सम्बन्धित हों जिनके लिए मैनुअल में छवतडे नहीं दिये गए हैं। यदि आप चाहें कि बी0 एड0 कक्षा के विद्यार्थियों का सृजनात्मकता स्तर मापा जाये तो फिर आपसे इस समूह विशेष के सृजनात्मकता स्तर के छवतडे स्वयं तय करने होंगे। ऐसा करने के लिए आपको निम्न प्रकार आगे बढ़ना होगा।
 - i. माना आपने 100 बी0 एड0 के छात्रों का सृजनात्मक परीक्षण लिया है तब आप पहले सभी तीनों तरह के स्कोर्स तथा मालूम कर लें।
 - ii. अब इन मूल अंकों को स्टेण्डर्ड स्कोर्स- में बदलने के लिए निम्न सूत्रका प्रयोग करें।

$$T = \frac{10(X-M)}{\sigma} + 50$$

(यहाँ X का अर्थ है Original Scores, M का अर्थ है 100 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का मध्यमान (Mean) तथा 0 का अर्थ 100 विद्यार्थियों के प्राप्तांक का प्रामाणिक विचलन Standard Derivation)

- iii. इस तरह T. Scores में बदलने के बाद अब कुल स्कोर (Composite Scores) ज्ञात किया जा सकता है। ऐसा करने के लिए Original, Fluency तथा Flexibility के T. Scores को जोड़ लिया जाता है। यह (Composite Scores) ही अब किसी विद्यार्थी के सृजनात्मक स्तर को बताने वाला स्कोर होता है।
 - iv. इस (Composite Scores) को अब समूह में शामिल अन्य विद्यार्थियों को आपस में सृजनात्मकता स्तर पर तुलना करने के लिए इस्तेमाल किया जा सकता है। कारण वंश अब यहाँ शतांश मान (Percentile Rank) भी ज्ञात किया जा सकता है।
3. अगर मूल प्राप्तांकों (Raw Scores) से ही निष्कर्ष निकालने हों तो हम पहले समूह के प्राप्तांकों का मध्यमान

(M) तथा प्रमाणित विचलन (SD) ज्ञात करते हैं और फिर उच्च वर्ग तथा निम्न वर्ग में इन scores को रखने के लिए निम्न सूत्र काम में लाते हैं।

उच्च सृजनात्मकता स्तर (High Creativity group) = 1 o or SD above the Mean.2-

निम्न सृजनात्मकता स्तर (Low Creativity Group) = 1 o or SD below the Mean.

एक समायोजित परिसूची की सहायता से समायोजन का मापन(**Adjustment by using a suitable adjustment Inventory**)

उद्देश्य - एक समायोजित परिसूची (कनेजउमदज प्दअमदजवतल) के द्वारा किसी विद्यार्थी के समायोजन का मापन करना।

आवश्यक परीक्षण सामग्री एवं परिस्थितियाँ

- i. डॉ0 ए0 के0 पी0 सिंहा तथा डॉ0 आर0 पी0 सिंह द्वारा निर्मित कॉलिज विद्यार्थियों हेतु समायोजन परिसूची की एक प्रति जिसमें परीक्षण पुस्तिका उत्तर पत्र तथा परीक्षण निर्देशिका शामिल है।
- ii. परीक्षण हेतु उचित व्यवस्था एवं उपयुक्त वातावरण।
- iii. परीक्षार्थी का परिचयात्मक विवरण Identifying data of the Subject

नाम : सौमेश आयु : 17 वर्ष

कक्षा : 12वीं लिंग : पुरुष

पिता का व्यवसाय : नौकरी, 14,000 रू0 प्रतिमाह

iv. परीक्षण सामग्री का विवरण- (Description of the Material)

इसमें समायोजन के 5 क्षेत्रों-घर, स्वास्थ्य, सामाजिक संवेगात्मक तथा शैक्षिकसे सम्बन्धित समायोजन को मापने का प्रयत्न किया गया है।

a. **परीक्षण पुस्तिका** - इसमें कुल 8 पृष्ठ हैं। पृष्ठ 3 से 7 तक ही परीक्षण प्रश्न दिये हुए हैं जिनकी गिनती 102 है।

इसी उत्तर पत्र के नीचे के हिस्से में अंकन-

तालिका बनी होती है जिसका उपयोग परीक्षण द्वारा किया जाता है।

b. **परीक्षण निर्देशिका** - इस निर्देशिका में परीक्षार्थी के उत्तरों की जाँच करके उसके प्राप्तांकों की गणना क्षेत्र अनुसार तथा कुल समायोजन के रूप में कैसे की जाये तथा

फिर प्राप्तांकों की सहायता से उसकी समायोजन क्षमता या स्तर के बारे में कैसे निष्कर्ष निकाले जाये।

- v. परीक्षण लेना - प्रस्तुत समायोजन परिसूची से समायोजन मापन हेतु निम्न प्रकार आगे बढ़ा गया।
- सबसे पहले परीक्षार्थी को सुविधा जनक स्थिति में आराम से बैठाया गया। परीक्षण से सम्बन्धित उपयुक्त सुविधाएँ तथा शांत वातावरण प्रदान करने के सभी आवश्यक उपाय किये गए।
 - उसे परीक्षण पुस्तिका तथा उत्तर- पत्र की एक-2 प्रति दे दी गई।
 - इसके पश्चात उससे उत्तर-पत्र पर बने परिचयात्मक विवरण सम्बन्धी कॉलमों को भरने के लिए कहा गया। इन्हें परीक्षण द्वारा स्वयं भी पढ़कर स्पष्ट कर दिया गया।
- vi. अंक लगाना - परीक्षार्थी के द्वारा दिये गए उत्तरों का मूल्यांकन अब अंकन-कुंजियों द्वारा किया गया। ये कुंजियाँ गिनती में 5 है जो विभिन्न समायोजन क्षेत्रों से सम्बन्धित समायोजन प्रश्नों के उत्तरों के मूल्यांकन हेतु काम में लाई जाती है।

समायोजन क्षेत्र	प्राप्तांक
गृह समायोजन	7
स्वास्थ्य समायोजन	6
सामाजिक समायोजन	10
संवेगात्मक समायोजन	15
शैक्षिक समायोजन	11
सामान्य समायोजन	49

- vii. प्राप्तांकों से निष्कर्ष निकालना (Interpretation Through Percentile Norms) मैनुअल में क्षेत्रानुसार Area Wise) तथा कुल समायोजन (General Adjustment) 'P'

के लिए पुरुष और स्त्री वर्ग दोनों के लिए अलग से Percentile Norms की तालिकाएँ दी हुई है जिनकी सहायता से परीक्षार्थी के मूल प्राप्तांकों (Original Scores) को सतांश मानो (Percentiles) में बदल जा सकता है। हमारे परीक्षार्थी सौमेश के इस दृष्टि से विभिन्न समायोजन क्षेत्रों में जो शंताशमान प्राप्त हुए उनके हिसाब से उसके समायोजन के बारे में निम्न निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं।

गृह समायोजन के क्षेत्र में उसके मूल प्राप्तांक 7 हैं जिनका शतांश मान मैनुअल की तालिका -1 अनुसार पी 80 आता है। इस दृष्टि से उसकी गिनती ऐसे विद्यार्थियों में की जा सकती है जो घर परिवार की दुनिया में काफी कुसमायोजित कहे जा सकते हैं। क्योंकि कुल 20 प्रतिशत विद्यार्थी ही पूरे समूह में ऐसे हैं जो उससे ज्यादा कुसमायोजित है। यही बात (ख) स्वास्थ्य समायोजन जिसका शंतांश मान पी 80 (ग) सामाजिक समायोजन जिसका शतांश मान भी पी 80 तथा (ख) शैक्षिक समायोजन जिसका शंतांशमान भी पी 80 है के लिए लागू होती है। (घ) क्षेत्र यानी संवेगात्मक समायोजन में उसका प्राप्तांक 15 है जिसका शंतांशमान पी 70 है। इस क्षेत्र में यह अन्य समायोजन क्षेत्रों की तुलना में कुछ कम कुसमायोजित है। फिर भी पूरे समूह में कुल 30 प्रतिशत ही ऐसे हैं जो उससे अधिक कुसमायोजित है। कुल सामान्य समायोजन (Total General Adjustment) की दृष्टि से भी उसके मूल प्राप्तांक 49 है। जिनका शंतांशमान Percentile P_{80} से ज्यादा बैठता है। अतः सामान्य समायोजन की दृष्टि से भी उसे काफी कुसमायोजित कहा जा सकता है।

व्याख्या (Discussion):- सौमेश ग्रह समायोजन तथा संवेगात्मक-समायोजन की दृष्टि से सामान्य है। जबकि समायोजन के अन्य सभी क्षेत्रों - स्वास्थ्य सामाजिक तथा शैक्षिक में उसमें समायोजन स्तर असंतोषजनक ही हैं इस तरह वह अपने आपसे ठीक प्रकार समायोजित नहीं है। और कुसमायोजन का ही शिकार है।

5.8 सारांश

प्रबंध के लोग और समाजशास्त्र के लोग भी आवश्यकतापनुसार परीक्षणों की रचना करते हैं। यह परीक्षण सामान्य सिद्धान्तों के आधार पर बनाए जाते हैं।

कोई भी दो व्यक्ति एक जैसे नहीं होते। कईयों की बुद्धि तेज होती है, कईयों की मन्द होती है, कई जल्दी काम कर लेते हैं। कई बहुत धीरे-धीरे काम करते हैं, कई समस्याओं को जल्दी हल कर लेते हैं, कई उलजे रहते हैं, कईयों के लिए नई स्थिति के सामंजस्य स्थापित करना आसान होता है तो कई इसमें बड़ी कड़ीनाई अनुभव करते हैं।

आधुनिक मनोविज्ञान के इन सब बातों पर ध्यान रखते हुए उचित परीक्षणों का निर्माण किया है जिसे आज के इस युग में उनका भरपूर प्रयोग कर रहे हैं।

5.9 सन्दर्भ ग्रन्थ

1. Educational (Psychology)	—	S.K. Mangal
2. Educational Technology	—	J.S. Walia
3. Measurement, Evaluation and	—	Dr. Mridula Rawat
4. Statistics in Education	—	Dr. Beena Kapoor
5. Educational and Mental Measurement	—	Dr. A.B. Bhatt Nagar
6. Essential of Measurement in	—	Dr. R.A. Sharma
7. Educational of Psychology	—	
8. Statistics and Evaluation	—	Dr. D.N. Srivastava
9. Teaching of Science	—	A.K. Kulshretha
10. Teaching of Math's	—	Dr. S.K. Managal

5.10 निबंधात्मक प्रश्न

1. मनोविज्ञान परीक्षण के अर्थ को समझाइए तथा उसके गुण व महत्त्व पर प्रकाश डालिए।
2. मनोविज्ञान परीक्षण की परीक्षण विधि एवं व्याख्या से आप क्या समझते हैं कोई एक उदाहरण लेकर समझाइए।
3. परीक्षण की परिभाषा दीजिए। मौखिक परीक्षण का अर्थ स्पष्ट कीजिए।

इकाई-6 मापन एवं मूल्यांकन (Measurement & Evaluation)

- 6.1 प्रस्तावना
- 6.2 उद्देश्य
- 6.3 मापन की संकल्पना
- 6.4 मापन कि विशेषताएं
- 6.5 मापन के कार्य
- 6.6 मापन के स्तर
- 6.7 विभिन्न चरों का मापन
- 6.8 मूल्यांकन की संकल्पना
- 6.9 मूल्यांकन के उद्देश्य
- 6.10 मापन एवं मूल्यांकन में अंतर
- 6.11 मूल्यांकन की तकनीकें
- 6.12 मूल्यांकन के कार्य
- 6.13 सारांश
- 6.14 निबंधात्मक प्रश्न

6.1 प्रस्तावना

शिक्षा के क्षेत्र में जाँच और परीक्षा के स्थान पर वर्तमान में मान एवं मूल्यांकन का प्रयोग किया जाता है। इसके उद्देश्य, क्षेत्र और कार्य प्रणाली पुराने ढंग से ली जाने वाली परीक्षा से बिल्कुल भिन्न हैं। अध्यापन क्रियाओं द्वारा छात्रों के ज्ञानात्मक, भावात्मक तथा क्रियात्मक (मनो-शारीरिक) तीनों ही पक्षों का विकास का मापन किया जाता है। निष्पत्ति या उपलब्धि परीक्षणों द्वारा छात्रों के ज्ञानात्मक पक्ष का मापन किया जाता है, परन्तु उनके भावात्मक और मनोशारीरिक पक्षों के विकास का मापन कठिन होता है, अतः इन दोनों पक्षों के मापन हेतु मूल्यांकन प्रक्रिया अधिक उपयोगी है, क्योंकि मूल्यांकन एक सतत प्रक्रिया है तथा इसके द्वारा परिमाणात्मक और गुणात्मक दोनों ही पक्षों के बारे में सूचनाये प्राप्त होती हैं। इस प्रकार शिक्षा के क्षेत्र में मूल्यांकन का विशेष महत्त्व है। इस इकाई

में हम मापन उसके प्रकार एवं उसकी विशेषताएं और उसके कार्य साथ ही मूल्यांकन की परिभाषा संकल्पना उसके प्रकार कार्य एवं उसकी आवश्यकता पर विस्तृत चर्चा करेंगे

6.2 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के आप

1. मापन कि संकल्पना बता सकेंगे।
2. मापन कि विशेषताएं बता सकेंगे।
3. मापन के कार्यों पर चर्चा कर सकेंगे।
4. मापन के प्रकारों को बता सकेंगे।
5. मापन के विभिन्न स्तरों को बता सकेंगे।
6. मापन के विभिन्न विधियों का वर्णन कर सकेंगे।
7. मूल्यांकन की संकल्पना बता सकेंगे।
8. मूल्यांकन की विशेषताएं बता सकेंगे।
9. मूल्यांकन के कार्यों पर चर्चा कर सकेंगे।
10. मूल्यांकन के प्रकारों को बता सकेंगे।

मापन क्या?

मापन क्रिया में विभिन्न पक्षों के सम्बन्ध में साक्षियों का संकलन किया जाता है। मापन किसी वस्तु या उपलब्धि का संख्यात्मक माना है। उदाहरण के लिए अभिलाषा का वजट 35 किलोग्राम हैं, कार्तिक की बुद्धि-लब्धि 140 है, शुभम् के 90 अंक हैं, आदि। दूसरे शब्दों में मापन द्वारा लगाया जा सकता है कि कोई वस्तु, गुण या विशेषता में कितनी है?

इस प्रकार मापन में अंक प्रदान किये जाते हैं तथा किसी गुण या विशेषता के निर्धारित किये जाते हैं जिससे परिणाम का सही ज्ञान हो सके। अतः मापन वह प्रक्रिया है जिसके द्वारा विभिन्न योग्यताओं तथा गुणों के परिणाम के सम्बन्ध में बताया जाता है, परन्तु इतना ही पर्याय नहीं रहता, अध्यापक को यह भी ध्यान रखना होता है कि मापन द्वारा प्राप्त अंकों का स्तर क्या है? अर्थात् छात्रों के प्राप्तांक कितने अच्छे हैं, इसका निर्धारण करना मूल्यांकन में मापन, मूल्यांकन का ही भाग है, अर्थात् मूल्यांकन में मापन निहित होता है। ई.बी. वैस्ले ने ठीक ही लिखा है कि मापन मूल्यांकन का वह भाग है जो प्रतिशत, मात्र, अंको, मथ्यांक और अध्ययन द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। रेमर्स, गेज और रूमल ने और अधिक स्पष्ट करते हुए कहा है कि मापन से यह पता चलता है कि कोई वस्तु कितनी है? जबकि मूल्यांकन यह बताता है कि वस्तु कितनी अच्छी है।

6.3 मापन की संकल्पना

मापन की परिभाषा

- i. **हैल्मस्टेडर (Helmstadter)**- मापन को किसी व्यक्ति या पदार्थ में निहित विशेषताओं के अंकिक वर्णन की प्रक्रिया के रूप में परिभाषित किया गया है।

Measurement has been defined as the process of obtaining a numerical description of the extent to which a person or thing possesses some characteristics

- ii. **ब्रेडफील्ड तथा मोरेडॉक (Brodfield and Moredack)**- किसी तथ्य के विभिन्न आयामों को प्रतीक प्रदान करना ही मापन कहलाता है।

Measurement is the process of assigning symbols to dimensions of phenomena in order to characterize the states of phenomenon as precisely as possible

- iii. **एस.एस. स्टीवेन्स (S.S. Stevens)** - मापन किन्हीं निश्चित स्वीकृत नियमों के अनुसार वस्तुओं को अंक प्रदान करने की प्रक्रिया है।

Measurement is the process of assigning numbers to objects according to certain rules

इस प्रकार उपरोक्त परिभाषाओं के आधार पर निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि मापन के अन्तर्गत विभिन्न वस्तुओं, घटनाओं आदि का संख्यात्मक रूप में वर्णन किया जाता है तथा उनको प्रतीक प्रदान किये जाते हैं।

6.4 मापन की विशेषताएं

- i. मापन में कोई निरपेक्ष शून्यबिन्दु (Absolute zero-point) नहीं होता। यह किसी कल्पित मानक के सापेक्ष होता है।
- ii. मापन की इकाईयाँ निश्चित नहीं होती। प्रत्येक व्यक्ति के लिए इनका मान समान नहीं होता।
- iii. शिक्षा में मापन अनन्तता की स्थिति (Sense of Infinity) बनाए रखता है। हम कभी भी इस बात का दावा नहीं कर सकते हैं हमने छात्र की सम्पूर्ण उपलब्धि का मापन कर लिया है अथवा उसकी बुद्धि का सही अंदाजा लगा लिया है।

- iv. मापन अप्रत्यक्ष है; अर्थात् उसका सीधा मापन न होकर किसी उपयुक्त माध्यम के आधार पर होता है। हम उपलब्धि का मापन व्यक्ति के किसी अन्य प्रकार के कार्य अथवा व्यवहार को देखकर करते हैं, ठीक वैसे ही, जैसे बिजली की पहचान पंखे के चलाने पर होती है।
- v. मापन किसी वस्तु का आंशिक वर्णन अत्यन्त शुद्धता से करता है।
- vi. मापन के द्वारा हम अधिक आसानी से परिणामों को दूसरों को संचालित कर सकते हैं; क्योंकि इसमें आत्मनिष्ठ (Subjective) निर्णयों का कोई स्थान नहीं होता है।
- vii. मापन व्यक्ति के मूल्यांकन में सहायक होता है।
- viii. मापन का प्रयोग आत्मनिष्ठ मूल्यांकन की अपेक्षा मितव्ययी है।

6.5 मापन के कार्य Functions of Measurement

व्यक्तियों में परीक्षणों में वैयक्तिक विभिन्नताएँ होती हैं, एक व्यक्ति किसी कार्य को अच्छी तरह कर सकता है किन्तु दूसरा व्यक्ति उसको उतनी सुचारूता से सम्पादित नहीं कर पाता जितनी सुचारूता से पहला व्यक्ति उस कार्य का सम्पादन कर सकता है, इस प्रकार की वैयक्तिक विभिन्नताओं का ज्ञान प्राप्त करने का एकमात्र साधन परीक्षण है।

मुख्यरूप से मापन के निम्न कार्य हैं:-

- i. वर्गीकरण
- ii. पूर्व-कथन
- iii. तुलना
- iv. परामर्श एवं निर्देशन
- v. निदान
- vi. अन्वेषण

- i. **वर्गीकरण** - विश्व में कोई भी दो व्यक्ति समान नहीं है; वे न केवल शारीरिक दृष्टि से एक दूसरे से भिन्न हैं वरन् मानसिक योग्यताओं के आधार पर भी एक दूसरे से पर्याप्त भिन्न है; अनुसन्धानों के आधार पर यह निष्कर्ष निकाला गया है कि प्रत्येक व्यक्ति आई.क्यू. क्षमता, रुचि अभिरूचि एवं व्यक्तित्व के अन्य शील गुणों की दृष्टि में दूसरों से भिन्न होता है, मापन परिणामों के आधार पर ही छात्रों की श्रेणी प्रदान करना, कक्षोन्नति प्रदान करना, सेक्शन निर्धारित करना, विज्ञान वर्ग में प्रवेश हेतु परीक्षा लेना आदि का आधार मापन परिणाम ही होते हैं; इतना ही नहीं मापन का शैक्षिक व्यावसायिक औद्योगिक एवं व्यक्तिगत चयन में भी व्यापक रूप से प्रयोग होता है।

- ii. **पूर्व-कथन** - पूर्व-कथन से हमारा तात्पर्य व्यक्ति की वर्तमान समताओं एवं योग्यताओं के आधार पर भविष्य के बारे में घोषण करना है, शिक्षा के क्षेत्र में पूर्व-कथन का बहुत महत्त्व है, पूर्व-कथन के द्वारा बालक के भावी विकास का भी अनुमान लगाया जा सकता है। मापन के परिणामों के आधार पर ही कहा जा सकता है कि बालक किसी विषय विशेष अथवा व्यवसाय में आगे चलकर सफल होगा अथवा नहीं; कोई अमुक व्यक्ति व्यवसाय में सफल होगा अथवा नहीं; अभिषेक की रूचि गणित एवं कला में किसमें अधिक है, बुद्धि-लब्धि के आधार पर छात्र उसके अनुरूप संतोषजनक कार्या करेगा अथवा नहीं आदि ऐसी बहुत सी समस्याओं में हमें पूर्व-कथन की आवश्यकता होती है।
- iii. **तुलना** - प्रत्येक परीक्षा का उद्देश्य यह भी होता है कि उसके परिणामों के आधार पर दो व्यक्तियों; दो कक्षाओं अथवा दो अध्ययन-प्रणालियों की तुलना की जा सके, प्रमाणीकृत परीक्षाओं के आधार पर, जिनके मानक पहले से ही तैयार किये होते हैं भिन्न-भिन्न व्यक्तियों की आपस में तुलना आसानी से की जा सकती है।- जैसे यदि किसी बुद्धि परीक्षा का मानक 100 है तो जिस व्यक्ति के अंक 90 आते हैं, उसे हम सामान्य से नीचे तथा जिसके अंक 110 आते हैं, उसे सामान्य से अच्छा कहेंगे, इस प्रकार भिन्न-भिन्न व्यक्तियों के बीच का अंतर अथवा समानता ज्ञात करके उनकी तुलना की जा सकती है, बुद्धि परीक्षाओं के समान ही विभिन्न विषयों में निर्मित उपलब्धि परीक्षणों के मानक तैयार किये जाते हैं जिनके आधार पर भिन्न-भिन्न छात्रों, स्कूलों कक्षाओं एवं शिक्षण विधियों की तुलना हम सफलतापूर्वक कर सकते हैं।
- iv. **परामर्श एवं निर्देशन** -शैक्षिक एवं व्यवसायिक क्षेत्रों में विद्यार्थी का मार्गदर्शन करना मापन का एक प्रमुख उद्देश्य है, मनोवैज्ञानिक परीक्षणों के आधार पर शिक्षक न केवल अपने विद्यार्थियों का ही मार्गदर्शन करता है अपितु वह स्वयं भी अपनी शिक्षण-प्रणाली को प्रभावी बनाने के लिये शिक्षण-प्रणाली में आवश्यक परिवर्तन कर सुधार सकता है, फलतः व्यवसायिक एवं शैक्षिक निर्देशन में मापन का महत्त्व पूर्ण स्थान है।
- v. **निदान** - निदान के सीखने का पता लगाना, जिस प्रकार चिकित्सा के क्षेत्र में निदान एक महत्त्व पूर्ण क्रिया है, उसी प्रकार शिक्षा में भी निदान एवं उपचारात्मक शिक्षण ;त्मउमकंपंस ज्मंबीपदहद्ध का महत्त्व पूर्ण स्थान है, चिकित्सा में चिकित्सक निदान का कार्य अनेक प्रकार के उपकरणों जैसे -थर्मामीटर, माइक्रोस्कोप, एक्स-रे आदि की सहायता से करता है, लेकिन शिक्षा के क्षेत्र में शिक्षक यह कार्य उपलब्धि परीक्षाओं एवं बुद्धि परीक्षाओं के माध्यम से करता है; निदान हमें छात्र की क्षमताओं एवं कमजोरियों का बोध कराता है, नैदानिक परीक्षाओं के द्वारा छात्र की कमजोरियों एवं कठिनाइयों का ज्ञान प्राप्त करना ही पर्याप्त नहीं होता अपितु उनके उपचार हेतु उपचारात्मक शिक्षण की व्यवस्था करना भी आवश्यक हो जाता है।

- vi. **अन्वेषण** - कोई भी शैक्षिक अनुसंधान बिना मापन के प्रयोग में लाये अधूरा है, शिक्षा तथा मनोविज्ञान के क्षेत्र में अनेक प्रकार के शोध एवं अनुसंधान कार्यों में मापन उपकरणों का व्यापक रूप से प्रयोग किया जाता है, दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं कि जिस प्रकार भौतिक विज्ञान में अनुसंधान के लिये मंत्रों की आवश्यकता होती है उसी प्रकार शैक्षिक तथा मनोवैज्ञानिक अनुसंधानों में परीक्षणों की आवश्यकता पड़ती है।

6.6 मापन के स्तर Levels or Scales of Measurement

मापन के अन्तर्गत व्यक्तियों, घटनाओं, वस्तुओं, शील, गुणों अथवा विशेषताओं को संख्यात्मक या परिणात्मक रूप प्रदान किया जाता है। व्यावहारिक रूप से मापन की मुख्यतः चार विधियाँ प्रचलित हैं। मुख्यतः मापन के निम्न चार स्तर या मापनी होती हैं।

- i. नाम सम्बन्धी अथवा शाब्दिक मापनी (Nominal Scale)
- ii. क्रम सूचक या क्रमिक मापनी (Ordinal Scale)
- iii. अन्तराल मापनी (Interval Scale)
- iv. अनुपात मापनी (Ratio Scale)

- i. **नोमिनल मापनी स्तर** - यह मापन की सबसे निम्न श्रेणी की मापनी है। इसमें वस्तुओं, घटनाओं अथवा विशेषताओं को उनके किन्हीं निश्चित गुणों के आधार पर अलग-अलग समूहों में रखा जाता है। उस समूह की पहचान के लिए उसे कोई संख्या चिन्ह, अथवा नाम दिया जाता है। इस समूह की एक विशेषता होती है कि उस समूह के सभी व्यक्ति या तत्व आपस में तो समान होते हैं, परन्तु किसी दूसरे समूह से बिल्कुल भिन्न होते हैं। उदाहरण के लिए मतदाताओं को स्त्री या पुरुष वर्गों में विभाजित करना, विभिन्न देशों की क्रिकेट या फुटबाल आदि खेलों की टीमों को अलग-अलग रंग की वेशभूषा तथा पहचान चिन्ह ; बवकमद्ध तथा क्रमांक देना, डाक वितरण हेतु अलग-अलग पिनकोड क्रमांक देना, विभिन्न स्तर के छात्र-छात्राओं को अलग-अलग श्रेणियों में विभाजित करना आदि। इस स्तर के मापन के लिए प्रश्नावली तथा निरीक्षण प्रविधि का प्रयोग किया जाता है।
- ii. **क्रम सूचक या क्रमिक मापनी** - मापन की शाब्दिक मापनी की अपेक्षा क्रमिक मापनी अधिक परिशुद्ध मापनी है। इसमें घटनाओं एवं वस्तुओं का वर्गीकरण अपेक्षाकृत अधिक स्पष्ट होता है। इस मापनी या स्तर में घटनाओं, व्यक्तियों अथवा विशेषताओं को किसी गुण या समानता के आधार पर बढ़ते हुये क्रम में या घटते हुये क्रम में व्यवस्थित करके उन्हें श्रेणी प्रदान की जाती है। इस मापनी को क्रम निर्धारण मापनी भी कहते हैं, क्योंकि

इसमें किसी घटना अथवा शोध गुण को विभिन्न श्रेणियों में क्रमिक आधार पर प्रस्तुत किया जाता है। इसकी सहायता से विभिन्न इकाइयों का वर्गीकरण तथा तुलनात्मक अध्ययन आसानी से किया जा सकता है। उदाहरण के लिए परीक्षा में प्राप्तांकों के आधार पर प्रथम, द्वितीय, तृतीय, चतुर्थ आदि क्रम प्रदान करना। इसी प्रकार सुन्दरता के आधार पर विभिन्न क्रम प्रदान करना जैसे- बहुत अधिक सुन्दर, अधिक सुन्दर, सुन्दर, कम सुन्दर आदि।

- iii. **अन्तराल मापनी** - यह मापनी या स्तर क्रमिक मापनी की अपेक्षा अधिक शुद्ध विकसित तथा विस्तृत सूचनाएं प्रदानक करता है, क्योंकि यह मापनी विभिन्न इकाइयों के मध्य अन्तर को भी स्पष्ट करती है। यह स्तर एक प्रकार से गुणात्मक आंकड़ों (Qualitative data) को परिणात्मक आंकड़ों (Quantitative data) में प्रस्तुत करता है। फारेनहाइट तथा सेन्टीग्रेड थर्मामीटर इस मापनी के उपयुक्त तथा प्रचलित उदाहरण हैं। थर्मामीटर में तापक्रम 980 से 1080 तक अंकित होता है तथा उसमें जितना अन्तर 990 तथा 1000 के बीच होता है उतना ही अन्तर 1040 तथा 1050 के मध्य रहता है।
- iv. **अनुपात मापनी** - यह सबसे अधिक प्रचलित तथा लोकप्रिय मापनी है, क्योंकि इसके द्वारा मापन अत्याधिक यथार्थ तथा शुद्ध रहता है। मापन की यह वस्तुनिष्ठ, विश्वसनीय तथा वैज्ञानिक निरपेक्ष शून्य बिंदु है। इस शून्य बिन्दू का सम्बन्ध किसी घटना, शोध गुण अथवा विशेषता की शून्य मात्रा से होता है। अनुपात मापनी (स्तर) में निरपेक्ष शून्य बिन्दू, मापनी का प्रारम्भिक बिन्दु माना जाता है। इसी के द्वारा हम दो स्थानों या विशेषताओं के मध्य दूरी का अनुपात लगा पाते हैं तथा कह सकते हैं कि। स्थान की तुलना में स्थान कितना अधिक पास या दूर है। इस मापनी का प्रयोग मुख्य रूप से भौतिक शास्त्र के विभिन्न चरा-तापक्रम, भार, आयतन आदि का मापन करने के लिए किया जाता है।

6.7 विभिन्न चरों का मापन Measurement of Variables

मनोविज्ञान, शिक्षा तथा सामाजिक विज्ञानों के क्षेत्र में प्रायः जिस विषय सामग्री का अध्ययन होता है; उसका स्वरूप अन्य विषयों व विज्ञानों की विषय-सामग्री से पर्याप्त मात्रा में भिन्न होता है। इसका एक प्रधान कारण यह है कि इन विषयों की विशेषतः मनोविज्ञान की विषय सामग्री का स्वरूप प्रायः अमूर्त व चंचल होता है तथा वह अनेक बाह्य व आन्तरिक कारणों से प्रभावित होता है। मनोविज्ञान की विषय-सामग्री का अध्ययन, अप्रत्यक्ष व जटिल होता है; क्योंकि सदैव परिवर्तनशील चरों के गुणात्मक स्वरूप को संख्यात्मक मापन का रूप देना अत्याधिक कठिन कार्य होता है। परन्तु

मनोविज्ञान के क्षेत्र में विद्वानों व वैज्ञानिकों ने जटिल प्रक्रियाओं के निरीक्षण व वैज्ञानिक अध्ययन के उपाय ढूँढ निकाले हैं और अब अमूर्त विषय का अध्ययन भी विधिवत् रूप से सांख्यिकीय अध्ययन के क्षेत्र में आ गया है। सुविधा के लिए ऐसी अध्ययन सामग्री को दो भागों में विभाजित किया जा सकता है -

क) गुणों का अध्ययन

ख) चरों का अध्ययन

विशेष गुणों के आधार पर व्यक्तियों को अलग-अलग स्पष्ट श्रेणियों में पर्याप्त रूप से विभाजित किया जा सकता है, जैसे स्त्री और पुरुषों में, बालको व व्यस्कों में अविवाहित व विवाहितों में आदि। इस विभाजन की विवेदक कसौटी यह है कि इन दोनों श्रेणियों में से एक व्यक्ति एक समय पर एक ही वर्ग का सदस्य हो सकता है अर्थात् एक वर्ग के एक सदस्य में प्रायः जब एक विशेष गुण विद्यमान रहता है तब दूसरे में प्रायः उसका अभाव रहता है।

इसी प्रकार चरों की विभिन्न मात्राओं के आधार पर भी चरों को अलग-अलग श्रेणियों में बांटा जा सकता है जैसे लम्बा, सामान्य व छोटा; हल्का, मध्यम व भारी; सामान्य, प्रतिभाशाली व मूढ़; अधिक गर्म व ठण्डा; अन्तर्मुखी, सामान्य व बहिर्मुखी आदि।

बोलमैन के अनुसार - “चर ऐसा कारक है जिसकी मात्रा को घटाया व बढ़ाया जा सकता है। ऐसा खण्डित चरणों में या किसी सांतत्मक पर इस प्रकार किया जा सकता है कि उस कारक में कोई और सहगामी परिवर्तन न हो”

Variable is a Sector, the quantity of which can be increase or decreased either in discrete steps or along some continuous without any other concomitant change in that factor

करलिंगर के शब्दों में - “चर ऐसा गुणधर्म है, जिसके विभिन्न परिणाम होते हैं”

Variable is a property that takes on different values.

ए.एल.एडवर्ड्स के अनुसार “चर वह प्रत्येक वस्तु है जिसका हम निरीक्षण कर सकते हैं और इसकी प्रकृति इस प्रकार की होती है कि इसकी इकाई का निरीक्षण के विभिन्न वर्गों में कहीं भी वर्णन किया जा सकता है”

By variable we mean anything that we can observe and of such a nature that each single observation can be classified into one of a number of mutually exclusive class.

इन प्रकार के उदाहरणों से यह स्पष्ट होता है कि गुणों के मापन के आधार पर मनोवैज्ञानिक विषय सामग्री को दो विशिष्ट या स्पष्ट भागों में वर्गीकृत किया जा सकता है:-

- क) खंडित श्रेणी
- ख) निरन्तर श्रेणी

खंडित चर - यह वह चर है जिसमें किन्हीं सीमाओं के बीच के पूर्णांक मूल्य सम्भव हों परन्तु मात्रात्मक मूल्य सम्भव न हो। इस प्रकार के चरों के उदाहरण हैं -कक्षा में विद्यार्थियों को किसी भी प्रकार के समूह में सदस्यों की संख्या, चिन्ता या बुद्धि परीक्षण आदि पर प्राप्त प्राप्तांक। इन चरों के पूर्णांक भी सम्भव हैं समूह में 211^{धू}2 सदस्य सम्भव नहीं हैं अर्थात् मात्रात्मक सम्भव नहीं है। इस चर में चरबद्ध सदैव पूर्णांक में होती है। पूर्णांक के अंश में नहीं हो सकती अर्थात् इस चर में मूल्य सीमित मात्रा में नहीं हो सकती है। कहने का तात्पर्य यह है कि जब दो विभाजित समूहों में अंतर हो वास्तविक हो किन्तु इस अंतर को मापनी पर मापा जा सके, जैसे हमारे पास 3 ऐसे छात्र हैं जिन्होंने क्रमशः 50, 60, 70 अंक प्राप्त किये हैं। यहां हम देखते हैं कि 50 एवं 60 अंक प्राप्त करने वाले छात्रों में जितना अंतर है, उतना 60 एवं 70 अंक प्राप्त करने वाले छात्रों में नहीं है।

खण्डित श्रेणी के अन्तर्गत वे मान आते हैं जिनका रूप स्वयं एक स्थायी व स्वतन्त्र सता में होता है; जैसे दस बालक, दो लड़कियां, एक परिवार के सदस्यों की संख्या 5 होना, एक कक्षा के छात्रों की संख्या का 30 होना, क्रिकेट के खिलाड़ी द्वारा एक पारी में बनाये गये रनों की संख्या का 148 होना। में सब मान सामान्यतः खण्डित श्रेणी में आते हैं क्योंकि यहां पर इन इकाइयों के मानो का इसी आधार पर अतिरिक्त विभाजन नहीं हो सकता।

निरन्तर चर - इस श्रेणी के अन्तर्गत वे मान आते हैं, जिनके भौतिक रूप का सूक्ष्म से सूक्ष्म विभाजन किया जा सकता है। इस चर में घट-बढ़ एक सांतत्मक पर की जा सकती है। उदाहरण के तौरपर 5मीटर कपड़े को अन्य कई छोटे-छोटे टुकड़ों में भी विभाजित किया जा सकता है। यदि इस कपड़े के एक मीटर के अन्य 5 टुकड़े कर दिये जायें, तो सभी टुकड़ों की लम्बाई समान होगी। इसी प्रकार समय का विभाजन शताब्दियों, वर्षों, महीनों, सप्ताहों व दिनों से लेकर घण्टो, मिनटों व सैकिण्ड को दशमलव के सहस्र भागों में अथवा मिली सैकिण्डों से आगे भी विभाजित किया जा सकता है। इसी प्रकार दूरी को शताब्दियों की दूरी से लेकर (क्योंकि एक नक्षत्र से दूसरे नक्षत्र तक की दूरी किलोमीटर में व्यक्त न करके उसे वर्षों की दूरी में बताया जाना अधिक उपयुक्त रहता है; क्योंकि वह दूरी सामान्यतः करोड़ों-करोड़ों की संख्या से भी अधिक होती है। किलोमीटर, डेकामीटर व मीटर से लेकर डेसीमीटर, सेण्टीमीटर तक तथा सेण्टीमीटर को मिलीमीटर तथा मिलीमीटर को भी 1 लाखवें भाग में (मिलीमाइक्रोम) तक विभाजित किया जा सकता है। संक्षेप में यह वह चर है जिसका मापन मापनी से किया जा सके और अनुमानतः मापनी के दो बिन्दुओं के बीच का मूल्य भी ज्ञात किया जा

सके। इसप्रकार से चरों के उदाहरण हैं - ऊँचाई और भार आदि इस चर में अकेले मूल्य की कल्पना नहीं की जा सकती। किसी अन्तराल पर कोई मूल्य हो सकता है अर्थात् इस चर में मूल्य असीमित संख्या में हो सकता है।

6.8 मूल्यांकन की संकल्पना Concept of Evaluation

अर्थ मापन प्रक्रिया के अन्तर्गत जहां कि वस्तु को आंकिक स्वरूप प्रदान किया जाता है, वहीं मूल्यांकन में इसके विपरित उस वस्तु का मूल्य निर्धारित किया जाता है अर्थात्, मूल्यांकन में इस सत्य का निर्माण किया जाता है कि कौन सी अच्छी है और कौन सी चीज बुरी? अतः जब हम किसी व्यक्ति अथवा वस्तु का उसके गुण दोषों के सन्दर्भ में अवलोकन करते हैं तो वहां 'मूल्यांकन' निहित होता है, शिक्षा के क्षेत्र में मूल्यांकन को एक तकनीकी के शब्द के रूप में प्रयोग किया जाता है, इस तकनीकी प्रक्रिया के अन्तर्गत न केवल छात्रों की विषय विशेष सम्बन्धी योग्यता की ही जानकारी प्राप्त की जाती है बल्कि यह भी जानने का प्रयास किया जाता है कि उससे सम्पूर्ण व्यक्तित्व का विकास किस सीमा तक हुआ है, साथ ही शिक्षण, पाठ्यक्रम, शिक्षण-विधियों आदि की सफलता के बारे में जानकारी प्राप्त करने में भी मूल्यांकन प्रक्रिया का सहारा लिया जाता है।

कुछ परिभाषाएं

रेमर्स एवं गेज के अनुसार "मूल्यांकन के अन्दर व्यक्ति या समाज अथवा दोनों की दृष्टि से जो उत्तम है अथवा वाँछनीय हैं, उसको मानकर चला जाता है"

डांडेकर के अनुसार "मूल्यांकन हमें यह बताता है कि बालक ने किस सीमा तक किन उद्देश्यों को प्राप्त किया है"

क्विलेन तथा हन्ना के अनुसार "विद्यालय द्वारा हुये बालक के व्यवहार में परिवर्तन के विषय में साक्ष्यों के संकलन तथा उनकी व्यवस्था करने की प्रक्रिया ही मूल्यांकन है"

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसन्धान एवं प्रशिक्षण परिषद द्वारा दी गई परिभाषा के अनुसार, "मूल्यांकन एक प्रक्रिया है जिसके द्वारा यह ज्ञात किया जाता है कि उद्देश्य किस सीमा तक प्राप्त किये गये हैं, कक्षा में दिये गये अधिगम अनुभव कहां तक प्रभावशाली सिद्ध हुये हैं और कहां तक शिक्षा के उद्देश्य पूर्ण किये गये हैं"

मूल्यांकन की मान्यताएँ

मूल्यांकन प्रक्रिया की कुछ प्रमुख मान्यताएँ इस प्रकार से हैं-

- i. मूल्यांकन प्रक्रिया वह सीमा निर्धारित करती है जहाँ तक शैक्षिक उद्देश्य प्राप्त किये जा सकते हैं।
- ii. मूल्यांकनकर्ता को मूल्यांकन विधा की प्रत्येक प्रविधि एवं विभिन्न उपकरणों का भली-भाँति ज्ञान होना चाहिए।
- iii. मूल्यांकन अपने आप में एक अन्त नहीं है वरन् दूसरी चीजों की प्राप्ति में एक साधन के रूप में प्रयुक्त किया जाना चाहिये।
- iv. मूल्यांकन अत्यन्त सावधानीपूर्वक किया जाना चाहिये, साथ ही यथा सम्भव त्रुटियों के जाल से बचना चाहिये।
- v. मापन एवं मूल्यांकन दोनों ही छात्र के सीखने को प्रभावित करते हैं।
- vi. मूल्यांकन का दायित्व विद्यालय, शिक्षक एवं अभिभावक सभी पर होता है।

6.9 मूल्यांकन के उद्देश्य Purpose of Evaluation

मूल्यांकन के निम्नलिखित प्रमुख उद्देश्य हैं-

- i. मूल्यांकन का प्रमुख उद्देश्य छात्रों का वर्गीकरण करना है।
- ii. मूल्यांकन के द्वारा छात्रों को उचित शैक्षिक एवं व्यावसायिक मार्ग निर्देशन प्रदान किया जाता है।
- iii. मूल्यांकन के द्वारा पाठ्यक्रम में उचित संशोधन किया जा सकता है।
- iv. मूल्यांकन का प्रयोग छात्रों में अधिगम की मात्रा ज्ञात करने में किया जाता है।
- v. मूल्यांकन के द्वारा शिक्षकों की क्षमता एवं सफलता का मापन किया जाता है।
- vi. मूल्यांकन के द्वारा छात्रों की दुर्बलताओं एवं योग्यताओं की जानकारी प्राप्त करने में सहायता मिलती है।
- vii. मूल्यांकन शिक्षण विधियों की उपयुक्तता की जाँच करता है।
- viii. मूल्यांकन का प्रयोग अनुदरेशन की प्रभावशीलता ज्ञात करने एवं उसके अनुरूप अपनी क्रियाओं के नियोजन में किया जाता है।
- ix. मूल्यांकन का एक उद्देश्य छात्रों की समस्याएँ समझने एवं उनकी प्रगति के सम्बन्ध में जानकारी प्रदान करना भी है।

6.10 मापन एवं मूल्यांकन में अंतर Difference between Measurement and Evaluation

मापन एवं मूल्यांकन में अंतर

	मापन	मूल्यांकन
1	मापन का क्षेत्र सीमित होता है।	मूल्यांकन का क्षेत्र व्यापक होता है।
2	मापन के द्वारा तुलनात्मक अध्ययन सम्भव नहीं है।	मूल्यांकन के द्वारा तुलनात्मक अध्ययन किया जा सकता है।
3	मापन एक साधन है।	मूल्यांकन अपने आप में एक साध्य है।
4	मापन का कार्य साक्ष्यों का एकत्रीकरण करना होता है।	मूल्यांकन का कार्य साक्ष्यों से निष्कर्ष निकालना होता है।
5	मापन में अधिक श्रम एवं समय की आवश्यकता नहीं होती है।	मूल्यांकन में अधिक श्रम एवं समय की आवश्यकता पड़ती है।
6	मापन पाठ्य-वस्तु (Content) केन्द्रित होता है।	मूल्यांकन उद्देश्य (Objective) केन्द्रित होता है।
7	मापन का स्वरूप अकात्मक होता है।	मूल्यांकन का स्वरूप गुणात्मक होता है।

मापन एवं मूल्यांकन में जो अंतर हैं उन्हें नीचे तुलना द्वारा और स्पष्ट किया गया है:-

6.11 मूल्यांकन कि प्रविधियां Techniques of Evaluation

मूल्यांकन की प्रविधियाँ - मूल्यांकन प्रविधि का अभिप्राय उस विधि से है जिसके द्वारा हम बालक के ज्ञान और व्यवहार में हुए परिवर्तनों तथा उनकी व्यक्तिगत विशेषताओं का मूल्यांकन करते हैं। शिक्षण के विभिन्न उद्देश्य होते हैं तथा प्रत्येक उद्देश्य के द्वारा छात्रों के ज्ञानात्मक, भावात्मक तथा क्रियात्मक पक्षों में परिवर्तन होता है। इन सभी प्रकार के व्यवहारिक परिवर्तनों का मूल्यांकन करने के लिए विभिन्न प्रकार की प्रविधियों का प्रयोग किया जाता है। मूल्यांकन की प्रमुख प्रविधियां निम्न है:-

1. परिणात्मक प्रविधियाँ (Quantitative Techniques)

- मौखिक परीक्षा-** इन परीक्षाओं का उद्देश्य विद्यार्थियों की तुरन्त अभिव्यक्ति तथा क्रियाशीलता की जाँच करना है। इसका प्रयोग पढ़ने की योग्यता, उच्चारण एवं सूचनाओं की जाँच तथा लिखित परीक्षाओं की पूर्ति के लिए किया जाता है। इसका

प्रयोग छात्रों के प्रत्यास्मरण, चिन्तन, विश्लेषण आदि योग्यताओं के मापन के लिए किया जाता है, इन परीक्षाओं का प्रयोग छोटी कक्षाओं के विद्यार्थियों के लिए तथा बड़ी कक्षाओं में प्रवेश तथा साक्षात्कार के लिए किया जाता है। इन परीक्षाओं के अग्र दोष है।

- इनके द्वारा संकोची विद्यार्थी अपने ज्ञान तथा योग्यता का प्रदर्शन नहीं कर पाते।
- इनके परिणामों में आत्मनिष्ठता की मात्रा अधिक होती है।
- इनका कोई लिखित प्रमाण नहीं होता। अतः अंक प्रदान करने में शिक्षक मनमानी कर सकता है।
- ये परीक्षाएँ प्रत्येक विद्यार्थी के लिए न्याय संगत नहीं है।

- लिखित परीक्षा** - सामान्यतः विद्यालयों में परीक्षा के इस रूप का प्रचलन है। इस प्रकार की परीक्षा में छात्र लिखित प्रश्नों के उत्तर भी लिखित रूप में देते हैं। इन परीक्षाओं का उपयोग छात्रों की स्मरण शक्ति, विश्लेषण, भाष्यशैली आदि का मापन करने के लिए किया जा सकता है। इसके अन्तर्गत कार्य समर्पण प्रतिवेदन लिखना, प्रश्नों के उत्तर लिखना एवं कागज -पेंसिल परीक्षाएँ आती है। ये परीक्षाएँ छात्र की ज्ञान प्राप्ति एवं पाठ्यवस्तु को संगठित तथा व्याख्या आदि की जाँच करने में बहुत उपयोगी है। ये परीक्षाएँ दो प्रकार की योग्यता होती है:-
 - निबन्धात्मक परीक्षाएँ
 - वस्तुनिष्ठ परीक्षाएँ

इनका प्रयोग विज्ञान, भूगोल, कला, शिल्प विज्ञान, कृषि, क्राफ्ट, मनोविज्ञान आदि विषयों में किया जाता है। इन परीक्षाओं का उद्देश्य छात्रों की प्रायोगिक क्षमता एवं कौशल का परीक्षण करना है।

2. गुणात्मक प्रविधियाँ (Qualitative Techniques)

ये प्रविधियाँ निम्न प्रकार होती है:-

- निरीक्षण(Observation)** - इसका प्रयोग मुख्यरूप से छोटे बालकों के मूल्यांकन में किया जाता है। इससे उनके वास्तविक व्यवहार का पता चलता है। निरीक्षण द्वारा बालकों के सामाजिक, संवेगात्मक, बोद्धिक एवं नैतिक विकास के विषय में जानकारी प्राप्त होती है।
- संचयी अभिलेख (Commulative Records)** - यह मूल्यांकन की महत्त्व पूर्ण प्रविधि है। इसमें छात्रों के घनाक्रम विवरण सम्मिलित है जिनमें अध्यापक छात्रों के महत्त्व पूर्ण व्यवहार एवं परिस्थितियों का वर्णन करता है। संचयी अभिलेख में

विद्यालय के प्रत्येक छात्र के सम्बन्ध में सूचनाओं को क्रमबद्ध रूप में व्यवस्थित किया जाता है।

- iii. **चैक लिस्ट (Checklist)**-यह प्रश्नावली की भांति व्यक्तिगत सूचना एवं मत जानने का प्रमुख साधन है। इसमें कुछ कथन छात्रों को दिए जाते हैं, जिनका उत्तर छात्रों को 'हा' अथवा 'नहीं' में देना होता है, इस प्रकार के कथन तैयार करने के लिए उद्देश्य स्पष्ट होने चाहिए। चैक लिस्ट का प्रयोग छात्रों की अभिवृत्तियों, अभिरूचियों एवं भावात्मक पक्ष के मापन के लिए किया जाता है। इनके अतिरिक्त गुणात्मक प्रविधियों में साक्षात्कार, प्रश्नावली तथा रेटिंग स्केल भी आते हैं।

परीक्षा प्रणाली में सुधार:-

- प्रत्येक कक्षा में साप्ताहिक व मासिक परीक्षा की व्यवस्था हो, इनके अंको को अर्द्धवार्षिक व वार्षिक परीक्षा में जोड़ा जाये।
- प्रत्येक विषय में मौखिक परीक्षा करवाई जाये।
- मौखिक परीक्षा के लिए कम से कम दो परीक्षकों की नियुक्ति की जाये।
- परीक्षा उचित समय पर हो।
- बाह्य परीक्षा अधिक न ली जाए।

उत्तर पुस्तकों के मूल्यांकन में सुधार:-

- पुस्तको के मूल्यांकन के सम्बन्ध में स्पष्ट नियम निर्धारित कर लिए जाएँ।
- मूल्यांकन के लिये योग्य परीक्षको की नियुक्ति की जाए।
- सभी प्रश्नों के आदर्श उत्तर तैयार करने के बाद परीक्षक मूल्यांकन करो।

6.12 मूल्यांकन के कार्य Functions of Evaluation

मूल्यांकन के कार्य-

- इसके द्वारा शिक्षण द्वारा प्राप्त बालक की योग्यताओं, कुशलताओ, वृत्तियों तथा रूचियों का पता लगाया जा सकता है।
- छात्रों को उनकी क्षमताओं और योग्यताओं के आधार पर वर्गीकरण करने में सहायता मिलती है। व्यक्तिगत विभिन्नता के आधार पर छात्रों के लिए शिक्षण की व्यवस्था तथा प्रतिभाशाली छात्रों के लिए अतिरिक्त चुनौतीपूर्ण कार्य कर सकता है। इसके द्वारा विद्यालयों में शैक्षिक और व्यवसायिक निर्देशन केन्द्रों की व्यवस्था की जा सकती है।

3. मूल्यांकन के द्वारा अनुदेशन की प्रक्रिया में सुधार किया जा सकता है। सीखने की परिस्थितियों में छात्रों के सम्मुख निश्चित उद्देश्यों की प्राप्ति के लिए किया जा सकता है। सीखने की क्रियाओं को लगातार आलोचनात्मक निरीक्षण व अध्ययन कर अनुदेशन की प्रक्रिया में सुधार लाया जा सकता है।
4. यह पाठ्यक्रम के उद्देश्यों का स्पष्टीकरण में सहायता करता है। मूल्यांकन तीनों में गहरा सम्बन्ध है। उद्देश्यों, सीखने के अनुभव और उपकरण का चुनाव करते समय उद्देश्यों को ध्यान में रखना चाहिए।
5. इसके द्वारा अधिगम में सुधार नहीं किया जाता है। वरन छात्र की विभिन्न योग्यताओं का विकास किया जाता है।
6. पाठ्यक्रम में भी सुधार लाया जा सकता है।
7. परीक्षण प्रणाली को वैध एवं विश्वसनीय बनाया जा सकता है।
8. शिक्षणा की प्रभावशीलता का पता लगाने में भी मूल्यांकन से किया जाता है, आपेक्षित उपलब्धि न होने पर विधियों में परिवर्तन किया जा सकता है।
9. विषय वस्तु की तार्किकता एवं मनोवैज्ञानिकता का पता लगाने में सहायता करता है।
10. बालक में चतुर्मुखी विकास का परीक्षण कर उसके भविष्य के सम्बन्ध में अनुमान लगाया जा सकता है।
11. मूल्यांकन द्वारा उपकरणों में सुधार व परिवर्तन किया जा सकता है।

6.13 सारांश

मूल्यांकन एवं मापन द्वारा शैक्षिक उपलब्धियों का मापन किया जाता है। परम्परागत परीक्षा प्रणाली में विषय वस्तु की उपलब्धि या जबकि कौशल तथा योग्यताओं को जो महत्त्व किदया जाता या जबकि मापन व मूल्यांकन विधि में व्यक्तित्व के व्यापक परिवर्तनों और शिक्षा कार्यक्रमों के मुख्य उद्देश्यों को महत्त्व दिया जाता है। मूल्यांकन व मापन कार्य केवल ज्ञात का परीक्षण ही नहीं वरन इनके द्वारा उद्देश्य, विधि, पाठ्यक्रम, मूल्यांकन के उपकरण तथा विधियों में परिवर्तन व सुधार लाकर पूरी शिक्षण प्रक्रिया में सुधार लाया जाता है।

6.14 निबन्धात्मक प्रश्न

1. मूल्यांकन के अर्थ को स्पष्ट कीजिए। इसके उद्देश्यों तथा कार्यों का उल्लेख कीजिए।
2. मापन तथा मूल्यांकन में अंतर स्पष्ट कीजिए। मापन के विभिन्न स्तरों का उल्लेख कीजिए।
3. मूल्यांकन की प्रविधियों का वर्णन करो।

इकाई 7: उपलब्धि परीक्षण निर्माण (Construction of Achievement Test)

- 7.1 प्रस्तावना
- 7.2 उद्देश्य
- 7.3 उपलब्धि परीक्षण की संकल्पना
- 7.4 उपलब्धि परीक्षणों के प्रकार
- 7.5 उपलब्धि परीक्षणों की विशेषताएं
- 7.6 मौखिक परीक्षाएं
- 7.7 वस्तुनिष्ठ परीक्षण
 - 7.7.1 पहचान सम्बन्धी प्रश्न
 - 7.7.2 रिकाल सम्बन्धी प्रश्न
- 7.8 निबंधात्मक उपलब्धि परीक्षण
- 7.9 निबंधात्मक एवं वस्तुनिष्ठ परीक्षणों की तुलना
- 7.10 मानक एवं निकष आधारित परीक्षण
- 7.11 शिक्षक निर्मित परीक्षण एवं मानक परीक्षण
- 7.12 सारांश
- 7.13 निबंधात्मक प्रश्न

7.1 प्रस्तावना

इस इकाई में आप उपलब्धि परीक्षणों के बारे में विस्तार से जानेंगे। इकाई की शुरुआत उपलब्धि परीक्षणों के इतिहास से की गयी है। इसमें आप उपलब्धि परीक्षणों के विभिन्न प्रकारों एवं उनमें शामिल विभिन्न प्रकार के प्रश्नों के बारे में भी देखेंगे। इकाई के आखिर में आपका परिचय निकष आधारित परीक्षण और मानक आधारित परीक्षण से होगा तथा आप उनमें अंतर भी देखेंगे।

7.2 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात आप -

1. उपलब्धि परीक्षणों को परिभाषित कर सकेंगे
2. उनके उपयोग बता सकेंगे
3. मौखिक परीक्षणों के बारे में चर्चा कर सकेंगे
4. वस्तुनिष्ठ परीक्षणों के बारे में बता सकेंगे
5. निबंधात्मक एवं वस्तुनिसत परीक्षणों कि तुलना कर सकेंगे
6. मानक एवं निकष आधारित परीक्षणों के बारे में बता सकेंगे
7. मानक एवं निकष आधारित परीक्षणों कि तुलना कर सकेंगे

7.3 उपलब्धि परिक्षण कि संकल्पना एवं इतिहास

शिक्षा के प्रक्रिया बहुत सोच विचार कर आयोजित की जाती है। बालक को जो शिक्षा दी जाती है उसका उद्देश्य है - ज्ञान में वृद्धि के द्वारा व्यवहार में वांछित परिवर्तन लाना जिसके फलस्वरूप उसे जीवन में लाभ होता है। एडमस का विचार है- “शिक्षा एक सचेतन एवं विचारपूर्ण प्रक्रिया है। जिसमें एक व्यक्ति दूसरे पर इसलिये प्रभाव डालता है। कि दूसरे का विकास और परिवर्तन हो सके।”

इस प्रकार शिक्षा की प्रक्रिया के अन्तराल सभी स्तरों पर शिक्षा के उद्देश्यों का निर्धारण किया जाता है। और इन उद्देश्यों की प्राप्ति के लिये विभिन्न शिक्षण प्रक्रियाओं का आयोजन किया जाता है। शैक्षिक उपलब्धि से तात्पर्य इन्ही शिक्षण उद्देश्यों की प्राप्ति से है।

सर्वप्रथम सन् 1840 में शिक्षा बोर्ड के सेक्रेटरी होरक मन ने लिखित परीक्षण पर जोर दिया। सन् 1865 में न्यूयार्क स्टेट रेजेन्ट ने भी लिखित परीक्षाओं को प्रोत्साहन दिया।

उन्नत शताब्दी के उत्तरार्ध में सर्वप्रथम फिशर ने वस्तुनिष्ठ परीक्षणों का सूत्रपात किया। तत्पश्चात जे. एम. राइस ने 1895 में इस दिशा में अपना विशेष योगदान दिया। लिखित परीक्षाओं का वास्तविक रूप में जन्म सन् 1900 में हुआ। 1900 में स्टोन ने गणितीय तर्क परीक्षण का विकास किया। सन् 1909 में थॉनडाइक ने बालकों के लिये हस्तलेख मापनी का प्रकाशन किया।

सन् 1923 में प्रथम मानकीकृत परीक्षण माला ‘स्टेनफोर्ड उपलब्धि परीक्षण’ प्रकाशित हुआ। सन् 1857 में ‘कैलीफोर्निया उपलब्धि परीक्षण तथा ‘एस. आर. ए. उपलब्धि श्रृंखला ‘सन् 1959 में मेट्रोपोलिटन उपलब्धि परीक्षण की रचना एवं संशोधन हुआ।

भारत में उपलब्धि परीक्षण का विकास:-

गुजराती भाषा में बम्बई के दवे ने विभिन्न उपलब्धि परीक्षण का मानकीकरण किया। हिन्दी भाषा में मनोविज्ञान उत्तर प्रदेश तथा पटना के मोहसिन ने उपलब्धि परीक्षणों की रचना की।

1885 में इलाहबाद के एल. पी. मेहरोत्रा एवे कमला मेहरोत्रा ने उत्तर प्रदेश में 8 वीं कक्षा के छात्रों हेतु एक उपलब्धि परीक्षण की रचना की जिसका उद्देश्य बच्चों की हिन्दी में समान्य भाषा योग्यता का मापन करना था।

7.4 उपलब्धि परीक्षणों के प्रकार

शिक्षा के उद्देश्य हैं। छात्र की अन्तर्निहित शक्तियों का अधिकतम विकास। इसी उद्देश्य की पूर्ति के लिये शिक्षण प्रक्रिया का आयोजन किया जाता है। शिक्षण अधिगम प्रक्रिया के द्वारा छात्र ने किस सीमा तक अपनी शक्तियों और योग्यताओं का विकास किया है। यह उसकी शैक्षिक उपलब्धि का सूचक है। दूसरे शब्दों में शैक्षिक उपलब्धि का तात्पर्य छात्रों द्वारा अर्जित ज्ञान, कौशल और योग्यता की मात्रा से है। इसके मापन के लिये विभिन्न प्रकार के परीक्षणों का प्रयोग किया जाता है। इन परीक्षणों को विभिन्न आधारों पर वर्गीकृत किया जा सकता है। जिनमें से एक माप वर्गीकरण का रूप इस प्रकार है-

1. उपयोग के आधार पर परीक्षणों के प्रकार
परीक्षण के उपयोग के आधार पर इन्हें दो भागों में बांटा जा सकता है।
 - a. उपलब्धि परीक्षण
 - b. निदानात्मक परीक्षण
2. निर्माण के आधार पर परीक्षणों के प्रकार परीक्षण की निर्माण विधि के आधार पर परीक्षणों को दो भागों में बांटा जा सकता है-
 - a. अध्यापक निर्मित परीक्षण
 - b. मानकीकृत परीक्षण
3. प्रकृति के आधार पर परीक्षणों के प्रकार
प्रश्नों की प्रकृति के आधार पर परीक्षणों को भागों में बांटा जा सकता है-
 - a. निबन्धात्मक परीक्षण
 - b. वस्तुनिष्ठ परीक्षण

4. माध्यम के आधार पर परीक्षणों के प्रकार:- छात्रों के मध्य प्रस्तुत करने के माध्यम के आधार पर परीक्षणों को दो भागों में बांटा जा सकता है।
 - a. शाब्दिक परीक्षण
 - b. अशाब्दिक परीक्षण

5. अभिव्यक्ति के आधार पर परीक्षणों के प्रकार:-
परीक्षण में प्रश्न व उत्तर की अभिव्यक्ति के आधार पर परीक्षणों को निम्नलिखित भागों में बांटा जा सकता है-
 - a. मौखिक परीक्षण
 - b. लिखित परीक्षण
 - c. प्रयोगात्मक परीक्षण

इन विभिन्न प्रकार के परीक्षणों का संक्षिप्त विवरण निम्नलिखित है।

उपलब्धि परीक्षण:- विद्यालय में छात्रों ने विभिन्न विषयों में कितना ज्ञान अर्जित किया है। इसका मापन करने के लिये उपलब्धि परीक्षणों से है। जो एक निश्चित समयाविधि के परीक्षण के पश्चात किसी विशेष में व्यक्ति के ज्ञान का मापन करते हैं। यह परीक्षण विभिन्न विषयों में ज्ञान के मापन के अतिरिक्त अध्यापक को यह जानने में भी सहायता देते हैं। कि उसे शिक्षण कार्य में किस सीमा तक सफलता प्राप्त हुई है।

छात्रों में विद्यालयी विषयों के अध्ययन द्वारा होने वाले ज्ञान क्रियात्मक एवं भावात्मक परिवर्तनों को मापने के लिये जो परीक्षण तैयार किये जाते हैं। उन्हें उपलब्धि परीक्षण कहते हैं। फ्रीमैन के विचार में , ‘उपलब्धि परीक्षण वह अभिकल्प है जो एक विशेष विषय या पाठ्यक्रम के विभिन्न विषयों में व्यक्ति के ज्ञान, समझ एवं कौशल का मापन करता है।’ सुपर के शब्दों में “ एक उपलब्धि या क्षमता परीक्षण यह ज्ञात करने के लिये प्रयोग किया जाता है कि व्यक्ति ने क्या और कितना सीखा तथा वह कोई कार्य कितनी भली भान्ति कर लेता है।”

के शब्दों में “ उपलब्धि परीक्षण वह अभिकल्प है जो विद्यार्थी के द्वारा ग्रहण किये गये ज्ञान, कुशलता या क्षमता मापन करता है।”

इस प्रकार कहा जा सकता है कि किसी विशेष क्षेत्र में शिक्षण के पश्चात उस क्षेत्र में छात्र की योग्यता या शक्ति के विकास की मात्रा मापन करने वाले उपकरणों को उपलब्धि परीक्षण कहते हैं।

7.5 उपलब्धि परीक्षणों की विशेषताएं Characteristics of a Good Achievement Test

एक उत्तम मनोवैज्ञानिक परीक्षण की विशेषतायें एक अच्छे उपलब्धि परीक्षण में निहित होनी चाहिए।

- i. उपलब्धि परीक्षण का उद्देश्य निश्चित होना चाहिए।
- ii. धन, समय व व्यक्ति के दृष्टिकोण से मितव्ययी होना चाहिए।
- iii. पाठ्यवस्तु छात्रों की योग्यता, क्षमता व रुचि के स्तर के अनुरूप हो जिससे उपलब्धि का मापन सही ढंग से हो सके।
- iv. फलांकन व प्रशासन सरल व स्पष्ट हो। जिससे इसका उपयोग अधिकतम परीक्षक कर सके।
- v. उपलब्धि परीक्षण के प्रश्न उस परीक्षण के विषय के सभी क्षेत्रों से सम्बन्धित हों जिससे परीक्षण को व्यापक कहा जा सके।
- vi. पाठ्यक्रम के सभी क्षेत्रों को संतुलित प्रतिनिधित्व मिलना चाहिये।
- vii. परीक्षण विभेदकारी होना चाहिये जो निम्न व श्रेष्ठ बालकों में भेद कर सके।
- viii. वैध व विश्वसनीय होना चाहिए।

7.6 मौखिक परीक्षण

मौखिक कार्य/परीक्षा क्या है?

जब बिना लिखे मन ही मन विषय से सम्बन्धित सभी क्रियाएं की जाती है तथा प्रश्नों के उत्तर निकाले जाते हैं, तब उसे मौखिक कार्य मौखिक कार्य में प्रश्न मौखिक तथा लिखित दोनों रूप से पूड़े जा सकते हैं। विद्यार्थी बिना पेन अथवा पेंसिल की सहायता से म नही मन में इन्हें हल करते हैं और मौखिक अथवा लिखित रूप से अपना उत्तर देते हैं। मौखिक कार्य किसी भी विषय में महत्त्व पूर्ण तथा अति आवश्यक है परन्तु वर्तमान परिस्थिति में मौखिक परीक्षा को उचित स्थान नहीं दिया गया है। मौखिक कार्य की आवश्यकता प्राथमिक स्तर से लेकर उच्च स्तर तक पड़ती है। यह किसी भी विषय की। आरम्भिक सीढ़ी होती है। इसके बाद ही लिखित तथा मानसिक कार्य आता है।

मौखिक परीक्षा से तात्पर्य - “ ऐसा कार्य जिसमें बालक किसी कार्य अथवा गणना को म नही मन विना किसी कागज और पेन्सिल की सहायता से हल करता है।”

मौखिक कार्य का प्रयोजन:-

- i. बालकों की स्मरण शक्ति को विकसित करना
- ii. बालकों में विचार तथा कल्पना शक्ति का विकास

- iii. बालकों में एकाग्रता और रचनात्मकता का विकास करना
- iv. चिन्तन तथा मनन की आदत विकसित करना
- v. पढ़ाये गये पाठ का अभ्यास अथवा पाठ की पुनरावृत्ति कराना
- vi. पाठ की शीघ्रता से मूल्यांकन करना।
- vii. गति एवं शुद्धता से कार्य करने की आदत डालना।

मौखिक परीक्षा/ कार्य का महत्त्व

- i. **दैनिक जीवन में आवश्यक:-** मौखिक कार्य का हमारे व्यवहारिक जीवन में अत्यधिक महत्त्व एवं आवश्यकता है। दैनिक जीवन की आवश्यकताओं, विशेष रूप से लेन देन, क्रय-विक्रय, ब्याज, प्रतिशत, लाभ-हानि, क्षेत्रफल आदि गणितीय ज्ञान का उपयोग मौखिक रूप से ही किया जाता है।
- ii. **मानसिक एवं बौद्धिक विकास:-** इसमें स्वतन्त्र चिन्तन तथा समस्या का ठीक-ठाक विश्लेषण करने का अधिक अभ्यास हो जाता है। इसमें बच्चों की तर्क शक्ति, विचार तथा कल्पना शक्ति वृद्धि होती है।
- iii. **समय और परिश्रम की बचत:-** मौखिक परीक्षा समय की बचत करता है। प्रत्येक क्रिया को लिखित रूप में करने से समय का अधिक अपव्यय होता है।
- iv. नीरसता एवं उचाट दूर करने में सहायक होता है।
- v. मौखिक प्रश्नों को ठीक प्रकार से पूछने से व्यक्तिगत ध्यान देने में सहायता मिलती है।
- vi. मौखिक परीक्षा से विद्यार्थियों में शुद्धता, यथार्थता एवं संक्षिप्तता का विकास होता है।
- vii. शिक्षा प्राप्ति में सहायक
 - a. मौखिक परीक्षा में विद्यार्थियों के पूर्वज्ञान का पता लगाना।
 - b. विषय के प्रस्तुतीकरण के लिए भी बीच-बीच में मौखिक प्रश्नों की सहायता लेनी पड़ती है।
 - c. मौखिक परीक्षा से अध्यापक को यह पता चलता है कि विद्यार्थी समझ रहे हैं अथवा नहीं।
 - d. मौखिक कार्य ठीक नियम सिखाने में सहायक होता है तथा उलझे हुए कार्य को सुलजाता है।

7.7 वस्तुनिष्ठ परीक्षण

सबसे पहले वस्तुनिष्ठ परीक्षा का लिखित रूप में निर्माण होरासमैन; भ्वतंबमउमददद्ध ने सन् 1854 ई. में किया था, इसके पश्चात जार्ज फिशर जे. एम. राइस तथा स्टार्च एवं थार्न डार्क आदि ने शैक्षणिक निस्पति के मापन के लिए सैकड़ों वस्तुनिष्ठ परीक्षाओं का निर्माण किया।

निबन्धात्मक परीक्षा की तुलना में वस्तुनिष्ठ परीक्षा का निर्माण कठिन होता है, इस परीक्षा का निर्माण शिक्षण अधिगम उद्देश्यों के मूल्यांकन के लिए किया जाता है। वस्तुनिष्ठ परीक्षाएं दो प्रकार की होती हैं:-

- i. मानदण्ड शक्ति परीक्षा (**Criterion Power Test**)
- ii. प्रमाणीकृत परीक्षा (**Standardized Test**)

मानदण्ड परीक्षाएं सरल होती हैं तथा इनके निर्माण में कम समय व कम खर्च होता है। प्रमाणिक वस्तुनिष्ठ परीक्षाओं के निर्माण में अधिक दक्षता, कुशलता, समय व धन की आवश्यकता होती है। स्टनले तथा रोस (Stanley & Ross) के अनुसार, वस्तुनिष्ठ के निर्माण में निम्न सोपानों का अनुकरण किया जाता है-

1. **नियोजन** - नियोजन वस्तुनिष्ठ परीक्षा निर्माण का पहला सोपान है, इसमें ब्लूम के वर्गीकरण के आधार पर उद्देश्यों के निर्धारण कर उन्हें व्यवहारिक रूप में लिखा जाता है। इसके पश्चात पाठ्यवस्तु का विश्लेषण किया जाता है। प्रश्नों के रूप व प्रश्नों की कुल संख्या का निर्धारण किया जाता है। विशिष्टीकरण तालिका (Tables of specification) का निर्माण इसमें विशेष रूप से सहायक होता है।
2. **परीक्षण पदों का निर्माण** - उद्देश्य एवं प्रश्नों के निर्धारण के बाद वास्तविक परीक्षण का निर्माण किया जाता है। इसके निर्माण में निम्न निर्माण (First -Try-out-Test) परीक्षा कहते हैं। इस परीक्षा का उद्देश्य यह जानना है कि अधिकांश छात्र कितने समय में परीक्षा के सभी प्रश्नों को पूरा कर लेते हैं। इससे अन्तिम परीक्षा का समय निर्धारित करने में सहायता मिलती है। परीक्षा में अंक प्रदान करने के लिए कुंजी तथा शुद्धि पत्र का प्रयोग किया जाता है। शुद्धि पत्र

$$S = R - \frac{W}{N - 1}$$

S= शुद्ध प्राप्तंक

R= सही उत्तरों की संख्या

W= गलत उत्तरों की संख्या

N=अनुमानों की संख्या

उदाहरण के लिए सत्य/असत्य प्रश्नों में 2 अनुमान होते हैं। यदि इसमें 40 सत्य- असत्य प्रश्न हों तथा छात्र में 30 प्रश्नों के उत्तर सही व 10 के गलत दिए हों और प्रत्येक प्रश्न का 1 अंक हो तो छात्र को 30 अंक नहीं दिए जाएंगे वरन् सूत्र की सहायता से निम्न प्रकार से उसके अंक निकाले जाएंगे –

$$S = 30 - \frac{10}{2 - 1}$$

$$= 30 - 10 = 20$$

अतः उसे 20 अंक मिलेंगे। इस सूत्र का प्रयोग उन बहुनिर्वाचन प्रश्नों में भी किया जाता है। जिनमें प्रत्येक प्रश्न के 4 या 4 से कम उत्तर दिए जाते हैं।

इसके पश्चात प्रथम परीक्षा की वैधता व विश्वसनीयता निकाली जाती है। प्रत्येक प्रश्न का विभेदकारी मान (Discrimination Value) निकाला जाता है। अन्तिम परीक्षा के निर्माण में यह देखा जाना आवश्यक है कि प्रत्येक उद्देश्य के मापन हेतु पर्याप्त प्रश्न हैं या नहीं। अन्तिम परीक्षा का प्रशासन छात्रों के बड़े समूह पर किया जाना चाहिए जिसमें उच्च सामान्य व निम्न योग्यता वाले विद्यार्थी सम्मिलित हों। परीक्षा के पश्चात अंक प्रदान किए जाते हैं। इस परीक्षा की पुनः वैधता तथा विश्वसनीयता ज्ञात की जाती है। कभी-कभी परीक्षा का प्रमाणीकरण (Standardization) भी किया जाता है।

मूल्यांकन (Evaluation) परीक्षा का प्रयोग करने के पश्चात उसकी व्याख्या करना अनिवार्य है। परीक्षा प्रयोग करने के पश्चात सामान्य स्तर के आधार पर भिन्न-भिन्न विद्यार्थियों की योग्यता की तुलना की जा सकती है।

बिन्दुओं का ध्यान रखा जाना आवश्यक है-

- i. एक से अधिक प्रकार के पदों का चुनाव किया जाए
- ii. एक प्रकार के पदों को एक ही साथ रखा जाए
- iii. अधिकतर पद 50 कठिनाई स्तर के हों।
- iv. पदों को कठिनाई के क्रम में रखा जाए

- v. प्रश्न की भाषा स्पष्ट व शब्दों की संख्या कम हो
- vi. प्रश्न की दिशा स्पष्ट हो
- vii. अधिकतर पद इस प्रकार के हो जिससे छात्र अनुमान न लगा सकें।

वस्तुनिष्ठ परीक्षण के पद दो प्रकार के होते हैं-

- i. प्रत्यास्मरण रूप (Recall Type)
- ii. अभिज्ञान रूप (Recognition Type)

प्रत्यास्मरण रूप के पद निम्न प्रकार के होते हैं-

- i. साधारण प्रत्यास्मरण रूप (Simple Recall Type)
- ii. रिक्त स्थान पूर्ति रूप (Completion Type)

अभिज्ञान रूप पदों के निम्न प्रकार के होते हैं-

- i. एकान्तर अनुक्रिया रूप (Alternate Response Type)
- ii. बहुनिर्वचन रूप (Multiple Choice Type)
- iii. समानता रूप (Matching Type)
- iv. वर्गीकरण रूप (Classification Type)
- v. सादृश अनुभव रूप (Analogy Type)

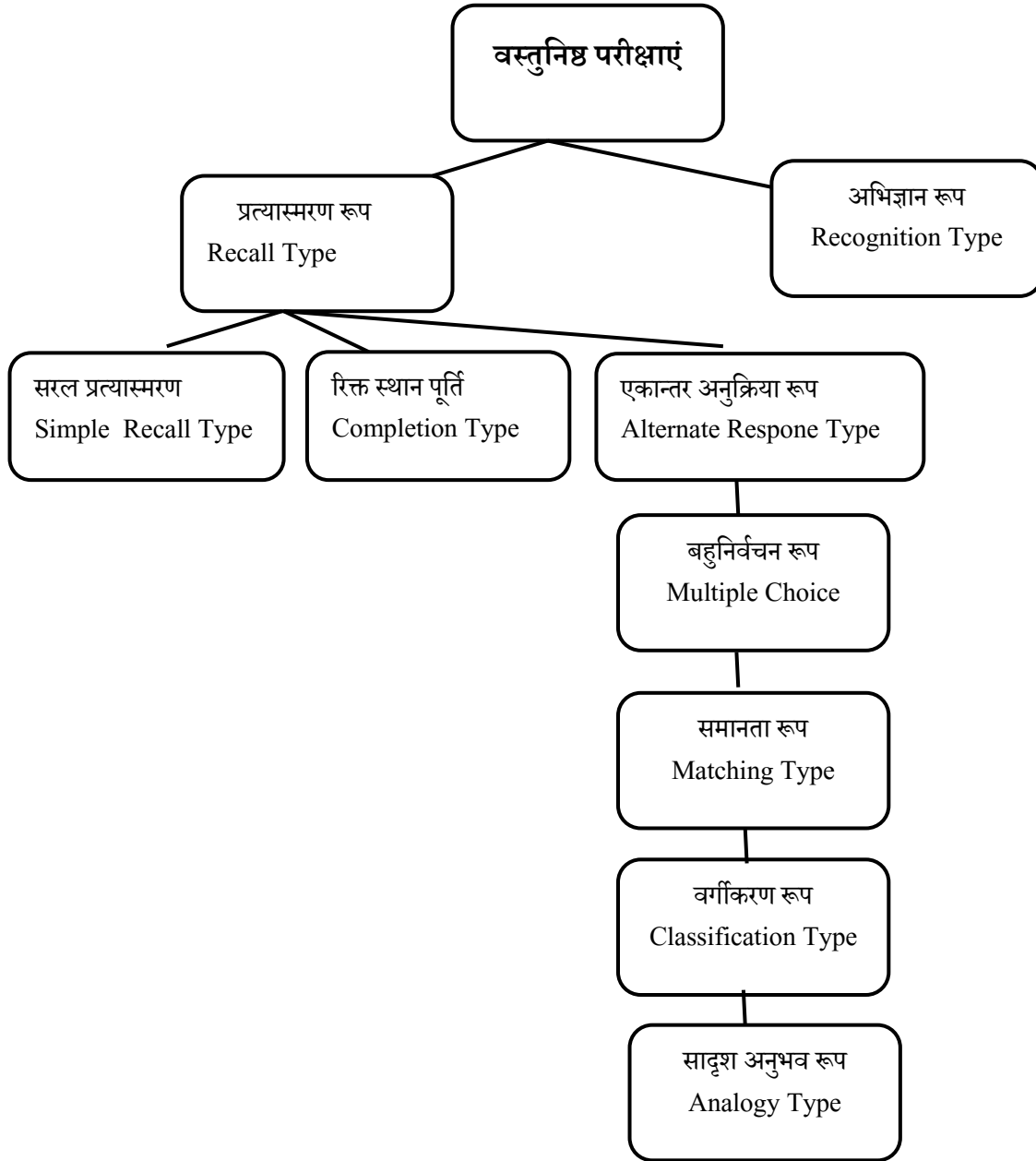
प्रत्येक प्रकार के प्रश्नों का अध्ययन निम्न पक्षों में किया जाता है-

- i. रूप का अर्थ एवं परिभाषा
- ii. अनुमान से सही करने के अवसर
- iii. उपयोगिता तथा सीमाएं
- iv. सावधानियां

3. **परीक्षा का प्रशासन (Administration of the Test)**- परीक्षा की जाँच करना वस्तुनिष्ठ परीक्षा का तीसरा सोपान है। परीक्षा के प्रशासन से पूर्व उपर्युक्त प्रकार के कम से कम 200 प्रश्न बनाने चाहिए। इन प्रश्नों को मनोवैज्ञानिक तथा विज्ञान के अध्यापकों के पास भेजना चाहिए जिससे यह पता चल सके कि प्रश्न जिन उद्देश्यों के लिए बनाए गए हैं उन्हीं का मापन कर रहे हैं या नहीं, चुने हुए प्रश्नों को छात्रों को दिया जाता है।

वस्तुनिष्ठ परीक्षा प्रकार (Objective- Type Tests Types)

- वस्तुनिष्ठ परीक्षा का तात्पर्य मापन की उस प्रविधि अथवा परीक्षा से है जिसका निर्माण निम्बन्धात्मक परीक्षाओं के दोषों को दूर करने के लिए किया जाता है। इसके द्वारा विद्यार्थियों की ज्ञान की उपलब्धि, योग्यता, अभिवृत्ति, अभिरूचि तथा बुद्धि आदि का परीक्षण थोड़े समय में किया जा सकता है। सबसे पहले वस्तुनिष्ठ का परीक्षा का लिखित रूप से निर्माण होरासमैन ने 1854 में किया था।



7.7.1 प्रत्यास्मरण रूप (Recall Type)

1. सरल प्रत्यास्मरण रूप (Simple Recall Type Tests)- प्रत्यास्मरण परीक्षाएं उन को कहते हैं जिनमें छात्रों के तथ्यात्मक ज्ञान की परीक्षा लेने के लिए प्रश्न पूछे जाते हैं। इन प्रश्नों के उत्तरों को विद्यार्थी अपनी स्मृति अथवा पूर्व अनुभवों के आधार पर केवल एक शब्द या संख्या में देते हैं।

उदाहरण - निर्देश- निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर सामने के कोष्ठकों में लिखिए

- i. बर्फ पदार्थ की कौन सी अवस्था है ()
- ii. हमारे हृदय में कितने कक्ष होते हैं ()
- iii. जमीन में रहने वाली प्राणी क्या कहलाते हैं ()
- iv. धारामापी को परिपथ में किस क्रम में लगाया जाता है ()
- v. एक मिनट में कितने सैकिण्ड होते हैं ()

इन पदों की रचना सरल होती है। परन्तु इनका प्रयोग मुख्य रूप से ज्ञानात्मक उद्देश्यों के मापन के लिए किया जाता है। इस तरह के प्रश्नों के निर्माण में निम्न सावधानियां आवश्यक हैं।

- i. प्रश्न का एक निश्चित उत्तर हो, द्विअर्थी वंसदिग्ध अर्थ वाले शब्दों का प्रयोग न किया जाए।
- ii. अपूर्ण वाक्यों की अपेक्षा प्रश्न पूछे जाए।
- iii. संख्यात्मक उत्तर पूछने में यह स्पष्ट कर देना आवश्यक है कि किस इकाई का उपयोग करना है।

2. वाक्य पूर्ति परीक्षाएँ (Completion Test)- इन परीक्षाओं के निर्माण में परीक्षक प्रश्न में एक अथवा दो शब्दों को छोड़ देता है। विद्यार्थी वाक्य रिक्त स्थान अथवा स्थानों को प्रत्यास्मरण की सहायता से पूरा करते हैं:- उदाहरण:- निम्नलिखित वाक्यों में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:-

- a. जड़ मिट्टी से _____ अवशोषित करती है।
- b. $NaCl + H_2SO_4 = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}$
- c. गाजर एक _____ जड़ है।
- d. जब किसी ठोस को द्रव्य में डुबोया जाता है तो उसके भार में हो _____ जाती है।

इस प्रकार के प्रश्नों के निर्माण में यह ध्यान रखा जाना आवश्यक है कि प्रत्येक वाक्य में खाली स्थानों की संख्या एक से अधिक नहीं हो। अधिक होने पर अनेक संभावित उत्तर हो सकते हैं और आवश्यक संकेतों की कमी हो जाती है।

इस प्रकार के पदों की रचना करना आसान होने के कारण शिक्षक द्वारा इनका उपयोग अधिक किया जाता है। इनमें तथ्यों के स्मरण और शाब्दिक उत्तरों पर अधिक जोर दिया जाता है।

7.7.2 अभिज्ञान रूप

1. **एकान्तर अनुक्रिया रूप (Alternative Responses Type)** - इसमें एक कथन होता है वह सत्य या असत्य होता है। छात्र को दो विकल्पों में से एक छाँटने के लिए कहा जाता है। इस प्रकार इन प्रश्नों का कभी-कभी 'हाँ या नहीं' में उत्तर देना पड़ता है।

उदाहरण निर्देश - निम्नलिखित कथन सही हो तो सत्य और गलत हो तो असत्य को रेखांकित कीजिए-

- | | |
|---|--------------|
| i. सूर्य से पृथ्वी तक ऊष्मा का संचरण संवाहन द्वारा होता है। | (सत्य/असत्य) |
| ii. पत्तियों का हरा रंग क्लोरोफिल के कारण होता है। | (सत्य/असत्य) |
| iii. सन्तुलित भोजन में वसा का होना आवश्यक है। | (सत्य/असत्य) |

इस प्रकार पदों के निर्माण में निम्न बातों का ध्यान रखा जाना आवश्यक है-

- वाक्य में दो नकारात्मक शब्दों का प्रयोग न किया जाए।
- एक वाक्य में अनेक विचारों का समावेश न ही।
- सही और गलत कथनों की संख्या लगभग बराबर होनी चाहिए।
- पद में लिखे कथन पूरी तरह से सही या पूरी तरह से गलत होने चाहिए।

गुण

- ऐसे पदों की रचना सरल है।
- कम समय में अधिक प्रश्नों के उत्तर दिए जा सकते हैं।
- कम समय में अधिक प्रश्नों को जाँचा जा सकता है। साथ ही अंकन वस्तुनिष्ठ होता है।

दोष

- इस प्रकार के प्रश्नों के उत्तर अनेक बार अनुमान के आधार पर दिए जाते हैं।
- इस प्रकार के प्रश्नों में अधिकतर कम महत्त्व के प्रश्नों को पूछा जाता है।

2. बहुनिर्वचन रूप (Multiple Choice Type Tests)- ऐसे पदों में एक कथन के उत्तर के रूप में अनेक विकल्प दिये रहते हैं। छात्र को इनमें से सबसे उपयुक्त सही विकल्प को छाँटना होता है।

उदाहरण - निर्देश- सही उत्तर पर निशान (√) लगाइए:-

1. तापमान नापने के लिए जिस उपकरण का प्रयोग किया जाता है उसे कहते हैं-

- | | |
|----------------|---------------|
| 1) बैरोमीटर | 2) लैक्टोमीटर |
| 3) हाइड्रोमीटर | 4) थर्मामीटर |
| 5) पायरोमीटर | |

2. धारा को मापने के लिए किस उपकरण का प्रयोग किया जाता है-

- | | |
|-------------------|--------------|
| 1) वर्नियर पैमाना | 2) धारामापी |
| 3) तापमापी | 4) बोल्टमीटर |

गुण

- अभिज्ञान में मापन के ये पद अद्वितीय हैं।
- ली के शब्दों में 'निर्णयों के परीक्षण हेतु बहुनिर्वचन या बहुविकल्प पद एकमात्र साधन है।
- कई विकल्प होने के नाते अनुमान लगाने की आशंका कम हो जाती है।

3. समानता रूप (Matching Type Test)- इस प्रकार के पद में कुछ शब्द, संख्याएं, संकेत, परिभाषाएं आदि दी होती हैं। छात्र से स्तम्भ के पदों की दूसरे स्तम्भ के पदों के साथ तुलना के लिये कहा जाता है।

उदाहरण निर्देश - स्तम्भ 'अ' के बाएं कोष्ठक में स्तम्भ 'ब' से सही पदों को चुनकर उनकी संख्या लिखिए:-

स्तम्भ 'अ'	स्तम्भ 'ब'
1) लम्बाई	क) स्प्रिंग तुला
2) धारा	ख) वर्नियर पैमाना
3) भार	ग) विभवमापी
4) विभवान्तर	घ) एमीटर

4. वर्गीकरण रूप (Classification Type Tests)- इस प्रकार के प्रश्नों के अन्तर्गत कुछ ऐसे शब्दों का समूह छात्रों के समक्ष रखा जाता है। जिनमें से एक शब्द असंगत या बेमेल होता है। छात्र से उस बेमेल शब्द को छांटने के

उदाहरण निर्देश- प्रत्येक प्रश्न में पाँच शब्द दिए हुए हैं।

प्रत्येक प्रश्न के इन पाँच शब्दों में से एक ऐसा शब्द है जो अन्य चार शब्दों की श्रेणी में नहीं रखा जा सकता है। प्रत्येक प्रश्न में ऐसे शब्द के नीचे रेखा खींचिए-

- तोता, चमगादड़, कोयल, गिलहरी, पतंग
- इलेक्ट्रॉन, प्रोटॉन, न्यूट्रॉन, परमाणु, यौगिक

5. सादृश अनुभव रूप (Analogy Type Tests)- इनमें दो समान परिस्थितियों को प्रस्तुत किया जाता है। पहली परिस्थिति पूर्ण, दूसरी परिस्थिति अपूर्ण होती है।

उदाहरण -निर्देश- निम्नलिखित प्रश्नों में दो परिस्थितियाँ प्रयुक्त की गई हैं। दूसरी परिस्थिति अपूर्ण है। पहली के आधार पर दूसरी की पूर्ति कीजिए।

- ताप : थर्मामीटर : _____ : बैरोमीटर
- चन्द्रमा : पृथ्वी : _____ : सूर्य

वस्तुनिष्ठ परीक्षा के गुण

- ये परीक्षाएं वस्तुनिष्ठ होती हैं।
- ये परीक्षाएं वैध होती हैं।
- ये परीक्षाएं विश्वसनीय होती हैं।

7.8 निबन्धात्मक उपलब्धि Essay Type Achievement Test

निबन्धात्मक उपलब्धि परीक्षाओं का उपयोग बहुत प्राचीन है, चीन में इस प्रकार के परीक्षाओं का उपयोग ईसा से लगभग 200 वर्ष पूर्व भी होता था, धीरे-धीरे चीन देश से यह परीक्षण इंग्लैण्ड, अमेरिका और फिर अन्य देशों में प्रचलित हुए, निबन्धात्मक परीक्षाओं का उपयोग विद्यालय तक ही सीमित नहीं है बल्कि उद्योग, सेना और सरकारी क्षेत्रों के अफसरों आदि का चयन इन्हीं परीक्षाओं के आधार पर किया जा रहा है।

निबन्धात्मक उपलब्धि परीक्षाओं के अर्थ को स्पष्ट करते हुए कहा जा सकता है कि जिनमें परीक्षार्थी मौखिक या लिखित प्रश्न का उत्तर निबन्ध रूप में दे देता है, जब परीक्षार्थी उत्तर निबन्ध रूप में देता है

तब उसे अपने विचारों को व्यक्त करने की पूरी स्वतन्त्रता होती है जिससे वह अपनी विभिन्न मानसिक योग्यताओं की अभिव्यक्ति सरलता से कर सकता है, इसमें वह अपनी लेखन शैली भी अपना सकता है। उसे अपने विचारों को व्यक्त करने की इतनी स्वतन्त्रता होती है कि वह अपने स्वतन्त्र चिन्तन, आलोचनात्मक चिन्तन और सृजनात्मक की व्यक्ति सरलता से कर सकते हैं, निबन्धात्मक उपलब्धि परीक्षण प्रायः अध्यापकों के द्वारा बनाये जाते हैं, उच्च कक्षाओं में पढ़ने वाले छात्रों की शैक्षिक उपलब्धि का मापन अधिकांशतः निबन्धात्मक परीक्षणों या परीक्षाओं द्वारा ही होता है।

सीमायें (Limitations)

- i. निबन्धात्मक परीक्षाओं में ज्ञान स्तर पर ज्ञान की परीक्षा पर अधिक बल दिया जाता है, शिक्षण के अन्य उद्देश्यों के परीक्षण की अवहेलना की जाती है।
- ii. शिक्षण उद्देश्यों को प्रश्न पत्रों के चयन में ध्यान नहीं दिया जाता है। पाठ्य-वस्तु का न्यायदर्श शुद्ध नहीं होता है।
- iii. उत्तर पुस्तिकाओं के अंकन में परीक्षक की आत्मनिष्ठता का समावेश नहीं रहता है।
- iv. शिक्षण उद्देश्य- केन्द्रित न होकर परीक्षा- केन्द्रित होता है, बाकि के गुणों के लिए विकास आदि का ध्यान नहीं दिया जाता है, परीक्षा में उत्तीर्ण होने के लिये अनावश्यक बातों को रटना होता है, इसमें पाठ्यवस्तु को रटने पर अधिक बल दिया जाता है।
- v. निबन्धात्मक परीक्षाओं की सहायता से छात्रों की विशेषताओं तथा न्यूनताओं (Strengths and Weaknesses) का पता नहीं लगाया जाता है, इसको निदानात्मक परीक्षा के रूप में प्रयोग नहीं कर सकते हैं।
- vi. इनमें बालक के सुलेख तथा लिखने की गति का मूल्यांकन होता है, बालकों की क्षमताओं का मापन शुद्ध रूप में नहीं होता है।
- vii. ये परीक्षायें विश्वसनीय तथा वैध नहीं होती हैं।

विशेषताएं (Advantages)

- i. निबन्धात्मक परीक्षाओं से उच्चस्तरीय बौद्धिक कुशलताओं जैसे- ज्ञान प्रयोग, सौन्दर्यानुभूति, क्षमताओं की परीक्षा की जाती है।
- ii. इनसे बालकों के मौलिक चिन्तन एवं सूझ तथा सृजनात्मक क्षमताओं की जाँच की जाती है।
- iii. बालकों की भाषा, शैली आदि की इन्हीं परीक्षाओं द्वारा जाँच की जाती है।
- iv. निबन्धात्मक परीक्षाओं को उद्देश्य केन्द्रित बनाया जाता है।

7.9 निबंधात्मक परीक्षण एवं वस्तुनिष्ठ परीक्षणों में अंतर

निबंधात्मक परीक्षण	वस्तुनिष्ठ परीक्षण
इस परीक्षण को हल करते समय छात्र अपना अधिकांश समय चिंतन और लेखन में लगाते हैं।	इस परीक्षण को हल करते समय छात्र अपना अधिकांश समय पढ़ने और चिंतन में लगाते हैं।
छात्र अपने उत्तरों की स्वयं ही व्यवस्थित करते हैं और अपने शब्दों में अभिव्यक्त करते हैं।	छात्र विभिन्न विकल्पों में से उत्तर चुनते हैं।
इस परीक्षण की गुणवत्ता मुख्यतः छात्रों के उत्तर पढ़ने वाले के स्पैशल पर निर्भर करती है।	इस परीक्षण की गुणवत्ता मुख्यतः परीक्षण निर्माता के स्पैशल पर निर्भर करती है।
इसके अर्न्तगत प्रश्नों की संख्या कम होती है और वह सामान्य प्रकृति के होते हैं। प्रश्नों के उत्तर सामान्यतः बड़े होते हैं।	इसके अर्न्तगत प्रश्नों की संख्या अधिक होती है और वह विशिष्ट प्रकृति के होते हैं। प्रश्नों के उत्तर सामान्यतः छोटे होते हैं।
इन परीक्षणों में छात्रों से क्या अपेक्षा है। यह स्पष्ट नहीं होता है।	इन परीक्षणों में छात्रों से क्या अपेक्षा है। यह स्पष्ट होता है।
इन परीक्षणों का निर्माण तो अपेक्षाकृत सरल है किन्तु इनको अंक शुद्धतापूर्वक देना अपेक्षाकृत जटिल व कठिन है।	इन परीक्षणों का निर्माण तो अपेक्षाकृत जटिल व कठिन होता है किन्तु इनको अंक शुद्धतापूर्वक देना अपेक्षाकृत सरल है।

7.10 मानक आधारित परीक्षण एवं निकष आधारित परीक्षण (Normed Referenced Test and Criteria Referenced Test) NRT & CRT

सन् 1960 में स्ट्रॉंग ने एक भिन्न प्रकार से शैक्षणिक परीक्षाओं का विकास किया जो परम्परागत परीक्षणों से भिन्न था तथा जिसे मानदण्ड सम्बन्धित परीक्षण के नात से जाना गया। इन परीक्षणों की रचना एवं उपयोग वैज्ञानिक तथा मनोवैज्ञानिक सिद्धान्तों पर आधारित है और यही कारण है कि इन परीक्षणों के महत्त्व को स्वीकारते हुए विद्वानों ने कहा कि जितनी जल्दी हो सके परम्परागत परीक्षणों को शैक्षिक मापन के क्षेत्र से विलुप्त कर देना चाहिए तथा इनके स्थान पर नवीन प्रकार के परीक्षणों को हर दृष्टि से परम्परागत परीक्षणों से बेहतर नहीं माना जा सकता, फिर भी यह सर्वमान्य सत्य है कि नवीन प्रकार के परीक्षण कहीं अधिक उपयोगी एवं जटिल परिस्थितियों में कहीं अधिक

सफलता पूर्वक किया जा सकता है। सन् 1960 के ही आसपास मापन के क्षेत्र में एक क्रान्ति सी आई तथा इसी के परिणामस्वरूप एक नवीन शब्दावली का विकास हुआ अर्न्तगत 'कसौटी सम्बन्धित परीक्षण' (Criterion Referenced Test) तथा 'मानक सम्बन्धित परीक्षण' (Norm Referenced Test) का विकास हुआ।

विद्वानों ने इन परीक्षणों को भिन्न-भिन्न नामों से पुकारा- जैसे उद्देश्य केन्द्रित परीक्षण (Objective Centred Test) तथा ज्ञान पक्ष सम्बन्धित परीक्षण (Domain Referenced Test) आदि। लेकिन वर्तमान मूल्यांकन प्रक्रिया के सन्दर्भ में इन परीक्षणों को Domain Referenced Test कहना कहीं अधिक व्यवहारिक प्रतीत होता है।

आधुनिक युग में प्रमापीकृत उपलब्धि परीक्षणों तथा अध्यापक निर्मित परीक्षणों को मानक-सम्बन्धित परीक्षणों की श्रेणी में रखा जाने लगा है। साथ ही यह भी देखने का प्रयास किया जाता है कि छात्रों की उपलब्धि के स्तर का मूल्यांकन मानक समूह के सापेक्ष किस प्रकार किया जा सकता है। यहां इस बात पर विशेष बल नहीं दिया जाता कि हम अपने शिक्षण-अधिगम उद्देश्यों की प्राप्ति में कहां तक सफल हुए हैं।

वरन् इस बात पर अधिक बल दिया जाता है कि परीक्षण की विषय वस्तु वैधता (Content validity) सुरक्षित रखी गयी है। अथवा नहीं।

जहाँ तक कसौटी सम्बन्धित परीक्षणों की उपयोगिता का प्रश्न है ये परीक्षण मानक सम्बन्धित परीक्षणों से कहीं अधिक उपयोगी होते हैं, क्योंकि ये हमें अपने विशिष्ट उद्देश्यों की प्राप्ति के सम्बन्ध में पूरी तरह आश्वस्त करते हैं। विशेषताओं के सन्दर्भ में ये दोनों परीक्षण जहाँ एक ओर पर्याप्त समानता रखते हैं वहीं दूसरी ओर ये एक दूसरे से किन्ही अर्थों में पर्याप्त भिन्नता भी रखते हैं। परीक्षण की विशेषताओं के सन्दर्भ में इन दोनों परीक्षणों को किसी सीमा तक बोधगम्य बनाया जा सकता है।

समानतायें (Similarities)

1. ये दोनों परीक्षण विद्यार्थी की साफलता का ज्ञान कराते हैं, अर्थात् दोनों ही परीक्षणों का कार्य-क्षेत्र एक समान है।
2. प्रश्नों की दृष्टि से ये दोनों परीक्षण समान होते हैं।
3. दोनों परीक्षणों में समाहित विभिन्न चरों की प्रकृति एक जैसी होती है।
4. दोनों परीक्षणों में पाठ्य-वस्तु, परीक्षण संरचना का मुख्य आधार होता है। साथ ही दोनों परीक्षणों में व्यापकता का भी ध्यान रखा जाता है।

5. दोनों परीक्षणों की अंकन कुंजी भी एक समान होती है जो वस्तुनिष्ठ प्रश्नों में प्रयुक्त विधि के ही समान होती है।
6. छात्र सफलता-असफलता को दोनों ही परीक्षणों का आधार माना जाता है। अनंतर केवल इतना है कि कसौटी परीक्षण में यह आधार छात्र की विशिष्ट योग्यताओं का द्योतक है। जबकि मानक परीक्षण में इस आधार का उपयोग छात्र के ज्ञान-स्तर का मापन करने के लिए किया जाता है। दोनों ही प्रकार के परीक्षण परम्परागत परीक्षण की तुलना में एक सुधार के रूप में अपनाये जाते हैं।

शैक्षिक मापन में दोनों परीक्षण समान सार्थकता रखते हैं।

विभिन्नतायें (Dis- Similarities)

कसौटी सम्बन्धित परीक्षण	मानक सम्बन्धित परीक्षण
कसौटी सम्बन्धित परीक्षण यह सूचना देते हैं कि हमें अपने विशिष्ट उद्देश्यों की प्राप्ति में कहाँ तक सफलता प्राप्त हुई है।	मानक सम्बन्धित परीक्षण यह सूचना देते हैं कि छात्रों में पाठ्य-वस्तु का कहाँ तक अध्ययन किया है।
ये परीक्षण उद्देश्य प्राप्ति का उल्लेख करते हैं।	ये परीक्षण छात्र के बोध स्तर का उल्लेख करते हैं।
इन परीक्षणों में शिक्षण के विभिन्न उद्देश्यों को यथासम्भव प्राप्त करने का प्रयास किया जाता है।	इन परीक्षणों में व्यापक पाठ्य वस्तु को प्रश्नों की रचना के लिये मुख्य आधार बनाया जाता है।
ये परीक्षण यह संकेत देते हैं कि हमने कितने उद्देश्य प्राप्त किये हैं और जिन्हें प्राप्त नहीं कर सके हैं। उनका क्या कारण है।	यहाँ परीक्षण परिणामों की व्याख्या कक्षा समूह के स्तर के रूप में की जाती है, अर्थात् छात्र विशेष का अपने समूह में क्या स्थान है।
इन परीक्षणों पर प्राप्त परिणाम छात्र की अपेक्षा अध्यापक के लिये अधिक कारगर सिद्ध होते हैं।	इन परीक्षणों से प्राप्त परिणाम अध्यापक को कोई पुनर्बलन प्रदान नहीं करते।
अंकन परीक्षणों मात्र यह संकेत देती हैं कि हमने अपने उद्देश्यों को प्राप्त करने में किस सीमा तक सफलता प्राप्त की है।	अंकन प्रक्रिया के आधार पर हम यह अनुमान लगाते हैं कि छात्र ने कितनी पाठ्य वस्तु का अध्ययन किया है।
इन परीक्षणों के निर्माण के लिये उद्देश्यों को प्रमुख आधार बनाया जाता है।	इन परीक्षणों का निर्माण परम्परागत तरीके से किया जाता है।
इन परीक्षणों में मानकों का विकास करना सम्भव	इन परीक्षणों में मानकों का विकास करना आवश्यक होता है।

होता है।	
ये परीक्षण अधिक उपयोगी माने जाते हैं।	ये परीक्षण कम उपयोगी माने जाते हैं।

7.11 शिक्षक निर्मित परीक्षण एवं मानक परीक्षण (Teacher Made Test and Standardized Test)

मापन के क्षेत्र में अधिक शुद्ध परीक्षणों के निर्माण का प्रयास किया जा रहा है। अधिक शुद्ध परीक्षण के लिए आवश्यक होता है कि मापन त्रुटियाँ-व्यक्तिगत त्रुटि, चरत्रुटि, स्थायी त्रुटि तथा अर्थापन त्रुटि को कम कर लिया जाए तब परीक्षण वस्तुनिष्ठ विश्वसनीय तथा वैध बनाया जाए इस दृष्टि से परीक्षणों को प्रमापीकृत किया जा सकता है।

प्रमापीकृत परीक्षण के मानकों का विकास विशिष्ट समूहों के लिए किया जाता है। जिनकी सहायता से प्राप्तांकों का अर्थापन शुद्ध रूप में किया जाता है। परन्तु इनकी रचना करना कठिन होता है। इसके लिए विशिष्ट सोपानों का अनुसरण किया जाता है। उनके निर्माण के लिए विशेष प्रशिक्षण एवं अभ्यास की आवश्यकता होती है। यहाँ पद वस्तुनिष्ठ परीक्षण के निर्माण के सम्बन्ध में वृत्तन किया जा रहा है-

- i. प्रमापीकृत परीक्षण (Standardized Test)
- ii. अध्यापक निर्मित परीक्षण (Teacher –made Test)
- iii. वस्तुनिष्ठ परीक्षण के निर्माण के सोपान (Steps for objective type test)

i. **प्रमापीकृत परीक्षण** - वस्तुनिष्ठ परीक्षणों को प्रमापीकृत भी किया जाता है। प्रमापीकृत से तात्पर्य परीक्षण का तुलनात्मक मानक विकसित करने से है, जिस परीक्षण के मानक विकसित कर लिए जाते हैं उसे प्रमापीकृत परीक्षण कहते हैं। प्रमापीकृत करने से अर्थापन की त्रुटि कम कर ली जाती है। इसका तात्पर्य यह है कि उस परीक्षण पर छात्र के प्राप्तांकों को मानक में परिवर्तित करके शुद्ध रूप में अर्थापन किया जाता है। प्रमापीकृत परीक्षण के प्राप्तांकों को प्रमाणिक अंकों में बदल लेते हैं और उनमें छात्र के स्तर के बारे में सही बोध होता है।

एक वस्तुनिष्ठ परीक्षण अधिक विश्वसनीय एवं वैध हो और उसके मानक विकसित न किए गए हो तो उस छात्र के प्राप्तांकों का अर्थापन सही रूप में नहीं किया जाता है। किसी भी

परीक्षण पर प्राप्तांकों को अर्थहीन कहा जाता है। जब उन्हें सार्थक बनाने के लिए प्रमाणिक अंकों में बदलने की आवश्यकता होती है। यह सुविधा प्रमापीकृत परीक्षणों में भी होती है। जो परीक्षण प्रमापीकृत होता है वह विश्वसनीय एवं वैध भी होता है। इस कस अर्थ है कि वह विश्वसनीय एवं वैध भी होता है। इस का अर्थ यह है कि विश्वसनीय एवं वैध परीक्षण का ही मानक विकसित किया जाता है।

ली. जे. क्रानबैक ने प्रमापीकृत परीक्षण की परिभाषा इस प्रकार दी है-“एक प्रमाणिक परीक्षण की प्रक्रिया उपकरण तथा अंकन की क्रिया शुद्ध एवं सुनिश्चित होती है और उस परीक्षण को विभिन्न समय पर विभिन्न स्थानों पर प्रयोग कर सकते हैं।”

- ii. **अध्यापक निर्मित परीक्षण** - वस्तुनिष्ठ परीक्षणों का निर्माण साधारणतः शिक्षकों द्वारा ही किया जाता है। इन नए प्रकार के परीक्षण को अनौपचारिक परीक्षण; प्दवितउंस ज्मेजद्ध भी कहते हैं। इस प्रकार के परीक्षण अधिक शुद्ध एवं वस्तुनिष्ठ होते हैं। इस प्रकार के परीक्षणों को प्रमापीकृत नहीं किया जाता है। इस प्रकार के परीक्षणों का प्रयोग शिक्षण की सफलता और छात्रों की प्रगति के मूल्यांकन में किया जाता है। जैसे- अर्द्धवार्षिक परीक्षा के लिए वस्तुनिष्ठ परीक्षण के निर्माण के लिए जितनी पाठ्यवस्तु का शिक्षण हुआ है। उतने ही पाठ्यक्रम पर परीक्षण का निर्माण किया जाए और वार्षिक परीक्षा में सम्पूर्ण पाठ्यवस्तु पर प्रश्नों की रचना की जाती है। शिक्षक द्वारा उनकी विश्वसनीयता और वैधता ज्ञात करते हैं, परन्तु मानक का विकास नहीं किया जाता है। अध्यापक निर्मित वस्तुनिष्ठ परीक्षणों में टेलर का नाम अधिक प्रसिद्ध है उन्हें इस प्रकार के परीक्षणों का विशेषज्ञ माना जाता है और उनहोने इस प्रकार के परीक्षणों की रचना के लिए सुझाव दिये हैं।

विशेषताएं

- i. इसमें छात्रों के उत्तरों का अंकन वस्तुनिष्ठ रूप में किया जाता है सही के लिए एक अंक तथा गलत के लिए शून्य दिया जाता है। प्रश्नों के उत्तर सुनिश्चित होते हैं।
- ii. इन परीक्षणों में प्रश्नों को अधिक संख्या में सम्मिलित किया जाता है। परन्तु छात्रों को उत्तर देने में कम समय लगता है। ये परीक्षण प्रशासन की दृष्टि से मितव्ययी होते हैं।
- iii. इस प्रकार के परीक्षण में उत्तरों के अंकन में लेखन भाषा का स्वामित्व तथा अभिव्यक्ति आदि का प्रभाव नहीं पड़ता है।
- iv. इस प्रकार के परीक्षण विश्वसनीय तथा वैध होते हैं, पदों का विश्लेषण भी किया जाता है। जिससे प्रश्नों का कठिनाई स्तर और उनकी विभेदीकरण शक्ति की भी गणना करते हैं। कठिनाई स्तर के क्रम में प्रश्नों को व्यवस्थित किया जाता है।

सीमायें

- i. निबन्धात्मक परीक्षण की अपेक्षा इन परीक्षणों की रचना करना कठिन होता है तथा इनकी रचना में समय भी अधिक लगता है।
- ii. इन औपचारिक परीक्षणों द्वारा तथ्यों के ज्ञान का ही मापन किया जा सकता है। इनके द्वारा आलोचनात्मक सौन्दर्यनुभूति तथा निर्णय शक्ति का मापन नहीं किया जा सकता है।
- iii. इन परीक्षणों में अनुमान से भी प्रश्नों को सही कर लिया जाता है। क्योंकि प्रश्न के साथ उसके उत्तर विकल्पों के रूप में दिये जाते हैं।
- iv. इन परीक्षणों द्वारा लेखन शैली, अभिव्यक्ति, भाषा का स्वामित्व, पाठ्य वस्तु की व्यवस्था आदि का मापन किया जाता है।
- v. यह परीक्षण समय, धन, तथा शक्ति की दृष्टि से अधिक खर्चीले होते हैं।

प्रमापीकृत परीक्षण तथा अध्यापक निर्मित वस्तुनिष्ठ परीक्षण की तुलना

- i. प्रमापीकृत परीक्षण का क्षेत्र व्यापक होता है एक सा पाठ्यक्रम जो प्रदेश के विद्यालयों में पढ़ाया जाता है। उस पर प्रमापीकृत परीक्षण का निर्माण किया जाता है। अध्यापक द्वारा निर्मित परीक्षण का क्षेत्र स्थानीय किसी एक संस्था तक ही सीमित होता है। किसी एक सत्र के लिए भी अध्यापक परीक्षण बनाये जाते हैं।
- ii. प्रमापीकृत परीक्षण ज्ञान के सम्पूर्ण क्षेत्र के सभी उद्देश्यों के मूल्यांकन के लिए बनाये जाते हैं। जबकि अध्यापक द्वारा निर्मित परीक्षणों का मापन का क्षेत्र सीमित होता है। इसके द्वारा सीमित ज्ञान का या विशिष्ट उद्देश्यों का ही मापन किया जाता है।
- iii. प्रमापीकृत परीक्षण की पाठ्यवस्तु प्रमाणिक होती है। प्रशासन हेतु निर्देश भी प्रमाणित होते हैं। अध्यापक द्वारा निर्मित परीक्षण में ऐसा नहीं किया जाता है।
- iv. प्रमापीकृत परीक्षण में प्रश्नों की व्यवस्था पदों के कठिनाई क्रम में की जाती है। सबसे सरल प्रश्न पहले और सबसे कठिन सगसे अन्त में दिया जाता है। प्राप्तांकों का अर्थापन भी प्रमाणिक होता है। यह व्यवस्था अध्यापक द्वारा निर्मित परीक्षणों में नहीं होती है।